Musterlösung Blatt 7

1. Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2-4x+4) = (2-x)^3.$$

2 ist einziger EW mit algebraischer Vielfachheit 3. Bestimmung der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x_2 = -x_3, \quad x_1 = 0.$$

Die Eigenvektoren zum EW 2 sind $x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \neq 0.$

Die geometrische Vielfachheit ist also 1, weshalb die Matrix nicht diagonalisierbar ist.

2. a) Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 3 & 3-x & 1 \\ -3 & -2 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-3x+2) = (1-x)^2(2-x)$$

Bestimmung der Eigenvektoren zum EW 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist also $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmung der Eigenvektoren zum EW 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -x_3$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist also $x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 2-x & -3 \\ -3 & 10-x \end{vmatrix} = (x-1)(x-11)$$

Bestimmung der Eigenvektoren zum EW 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3x_2, \quad \Rightarrow ER = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenvektoren zum EW 11:

$$\begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -3x_1, \quad \Rightarrow ER = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 \end{pmatrix}$$

c) Die zweite Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch und die Eigenwerte sind echt positiv, also ist sie positiv definit.

Die erste Matrix ist nicht symmetrisch (normalerweise spricht man nur bei symmetrischen Matrizen von Definitheit). Um die zugehörige quadratische Form auf Definitheit zu überprüfen, muss man die entsprechende symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,5 & -1,5 \\ 1,5 & 3 & -0.5 \\ -1.5 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachten, welche wegen $\begin{vmatrix} 3 & -0,5 \\ -0,5 & 0 \end{vmatrix} = -0,25$ indefinit ist.

3. a) $\bar{Y} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{100}{77} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{100}{77} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,9 \end{pmatrix}$

   b) Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ sind $0,3$ und $-0,1$; der Gleichgewichtszustand ist attraktiv.

4. a)

$$\text{Nettoeinkommen} = 70000 - (20000 \cdot 0,225 + 20000 \cdot 0,325 + 10000 \cdot 0,4) = 55000$$

$$\text{Nettoeinkommen} = 47000 - (20000 \cdot 0,225 + 7000 \cdot 0,325) = 40225$$

   b) Der durchschnittliche Steuersatz bei 70000 Euro Bruttoeinkommen ist $15000/70000 = 0,2143$ und bei 47000 $6775/47000 = 0,1441$.