Dr. G. Baur
René Pröpper

SoSe 2010
6. Juli 2010

Mathematische Grundlagen der Ökonomie II - Übungen

Letztes Blatt

1. (3 + 3 Punkte)

Bilden die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme einen Unterraum? Begründen Sie.

$$a) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

2. (3 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind folgende Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. (3 + 3 Punkte)

Was lässt sich über den Lösungsraum des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= b_1 \\ x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 3x_3 - 4x_4 &= b_3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

aussagen, falls der Vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ gegeben ist durch

$a)$ $(8, -4, -7, 8)$, $\qquad b)$ $(0, 0, 0, 0)$.

4. (4 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Geben Sie vier zu $Rg(A) = n$ äquivalente Ausssagen an.

5. (4 + 4 Punkte)

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme

$$a) \quad \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

6. (3 + 3 + 3 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Matrizen auf Definiheit (z.B. Hauptminorenkriterium)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) := -x^2 - y^2 - 4z^2 + 2xz + 6z$. Bestimmen Sie die Art und Lage der Extremstellen.

8. (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= \alpha. \end{aligned}$$

Wie hängt die Lösung vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ab? Wenden Sie die Cramersche Regel an.

9. (6 + 8 Punkte)

Berechnen Sie explizit die m-te Potenz der beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. (2 + 4 + 6 Punkte)

Invertieren Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. (4 + 4 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 3 \\ 3 & 1 & \beta \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wie hängt der Rang der beiden ersten Matrizen von ihrem jeweiligen Parameter ab?

12. (4 + 4 + 4 + 4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{LH}(\vec{a}, \vec{b}) = \mathcal{LH}(\vec{c}, \vec{d})$

b) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$ sind linear unabhängig.

c) Der Vektor $\vec{f}$ ist in $\mathcal{LH}(\vec{c}, \vec{d})$ enthalten.

d) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{f}$ sind linear abhängig.

13. (8 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $a\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 2-3t \\ 0 & t & 1-3t \\ -2 & -2t & t^2+2t-1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ -t^2+3t-2 \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von t hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, unendlich viele Lösungen und genau eine Lösung?

14. (4 + 4 + 4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten von folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 99 & 98 & 97 \\ 98 & 97 & 96 \\ 97 & 96 & 95 \end{pmatrix}.$$

15. (6 + 6 + 6 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der obigen Matrizen kann diagonalisiert werden, d.h. es existiert eine Diagonalmatrix D und eine Matrix S, so dass $D = S^{-1}MS$ $(M = A, B, C)$? Geben Sie D und S in den entsprechenden Fällen an.

16. (6 + 6 + 6 Punkte)

Berechnen Sie folgende Flächenintegrale:

a)

$$\iint\limits_M \sin(\pi(x^2 + y^2))\, d(x, y), \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\, y \geq 0\}$$

b)

$$\iint\limits_{[0,2]\times[1,3]} x^2y^2 + e^{x+y}\, d(x, y)$$

c)

$$\iint\limits_N xy\, d(x, y), \quad N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq x^2 + 1\}$$

17. (5 + 5 + 5 Punkte)

Prüfen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$a) \int_1^\infty \frac{\cos(\pi x)}{x\sqrt{x}}\, dx, \qquad b) \int_0^1 \frac{\cos(\frac{\pi}{4}x)}{x}\, dx, \qquad c) \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx.$$

18. (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ auf dem Intervall $[0, \pi/4]$. Berechnen Sie das Volumen, welches sich ergibt, wenn f um die x-Achse rotiert wird.

19. (jeweils 4 Punkte)

Geben Sie eine Stammfunktion zu folgenden Integralen an:

$$a) \int 3x^4 - 6x^6 - \sin x\, dx \qquad b) \int \frac{\sin x + x\cos x}{x \sin x}\, dx \qquad c) \int e^{6x} - e^{-\frac{1}{5}x}\, dx$$

$$d) \int \sin(2x)\cos(5x)\, dx \qquad e) \int \frac{x}{1 + x^4}\, dx \qquad f) \int e^{2x} \cos x\, dx$$

$$g) \int \frac{x^3 + x^2 - 7x - 11}{x^2 - 9}\, dx$$

20. (jeweils 2 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit wahr oder falsch, und geben Sie eine kurze Begründung.

a) Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig, so sind dies auch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

b) Ein Unterraum enthält immer den Nullvektor.

c) Jede stetige Funktion besitzt eine eindeutige Stammfunktion.

d) Ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, so existiert $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

e) Ist $f(x) \leq 1/x^2$ für $x \geq 1$, so existiert $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

f) Besitzt ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer quadratischen Matrix A zwei verschiedene Lösungen, dann besitzt es bereits unendlich viele Lösungen.

g) Sind alle Eigenwerte einer Matrix einfach, so ist sie diagonalisierbar.