Universität Ulm

Abgabe:
Bis 26.04.13, 8:15 Uhr
Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur
M. Gerlach

Sommersemester 13

25 Punkte

Übungen zur Analysis 1

Blatt 1

1. Beweise durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen. (10)

(a) Es ist $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ stets durch 6 teilbar.

(c) $3^n \geq 1 + 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und n Punkte auf einem Kreis gegeben. Möchte man je zwei verschiedene Punkte durch eine Gerade verbinden, so benötigt man genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Linien.

(e) Wir schreiben $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0. Es seien Zahlen a_n wie folgt definiert: $a_0 := 6$, $a_1 := 1$, $a_2 := 9$ sowie

$$a_{n+3} := 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $a_n = 2^n + 3 \cdot (-1)^n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Es sei (5)

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Lagavulin}, \text{Bowmore}, \text{Ardbeg}\}, \\ B &:= \{\text{Glendronach}, \text{Macallan}, \text{Lagavulin}, \text{Bowmore}\}, \\ C &:= \{\text{Bruichladdich}, \text{Ardbeg}\}. \end{aligned}$$

Bilde die Mengen $A \cup C$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\mathscr{P}(C)$ und $A \times C$.

3. Es sei X eine Menge und A und B seien Teilmengen von X. Ferner sei $\mathscr{A}$ eine Menge von Teilmengen von X, d.h. $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Beweise die folgenden Behauptungen. (6)

(a) Es ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(b) $\left(\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \right)^c = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A^c$

(c) $A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B$.

4. Finde ein Mengensystem $\mathscr{A}$, also eine Menge von Mengen, derart, dass (4)

$$\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A = \emptyset$$

während

$$\bigcap_{A \in \mathscr{B}} A \neq \emptyset$$

für alle Teilmengen $\mathscr{B}$ von $\mathscr{A}$ mit nur endlich vielen Elementen.