Dr. G. Baur
M. Gerlach
Sommersemester 13

28 Punkte

Übungen zur Analysis 1

Blatt 2

5. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die einer Zahl ihr Quadrat zuordnet. Untersuche f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und bestimme (4)

$$f(\{2,4,5\}) \text{ und } f^{-1}(\{1,4,5\}).$$

6. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und A_1, $A_2 \subset X$ sowie B, B_1, $B_2 \subset Y$. Beweise die folgenden Behauptungen. (8)

(a) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Zeige außerdem, durch Angabe eines Beispiels, dass in Aufgabenteil (c) im Allgemeinen keine Gleichheit vorliegt.

7. Es seien A, B und C nicht-leere Mengen und $f : B \to C$ und $g : A \to B$ bijektive Funktionen. Zeige, dass $f \circ g : A \to C$ eine bijektive Funktion ist mit $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. (4)

8. Untersuche folgende Relationen auf X auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität und gib im Falle einer Äquivalenzrelationen alle Äquivalenzklassen an. (8)

(a) X bezeichne die Mitglieder eines fiktiven Fußballclubs B. Es gelte $x \sim y$, falls x und y ein Bankkonto im gleichen Land besitzen.

(b) Auf $X := \mathbb{Z}$ sei $x \sim y$ falls $x - y$ ohne Rest durch 3 teilbar ist, also $x - y = 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $X := \mathscr{P}(\Omega)$. Wir definieren $A \sim B := A \cap B = \emptyset$.

(d) Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $X := \{f : \Omega \to \Omega \text{ bijektiv}\}$. Wir definieren $f \sim g :\Leftrightarrow f \circ g^{-1} = \mathrm{id}$.

9. Finde jeweils ein Beispiel einer (4)

(a) surjektiven Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$.

(b) injektiven Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$.