Definitheit

Dieses Thema aus der Linearen Algebra betrifft **symmetrische Matrizen** $A \in I\!R^{n,n}$ (symmetrisch heißt $A = A^T$) und den aus ihnen gebildeten **quadratischen Formen** $q(x) = x^T A x$,

ausgeschrieben $q_A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$.

Definition:

A bzw. die quadratische Form $q_A(x)$ heißt

(i) **positiv semidefinit,** falls $q_A(x) \ge 0 \ \forall\, x \in I\!R^n$

(ii) **positiv definit,** falls $q_A(x) > 0 \ \forall\, x \in I\!R^n,\ x \ne 0$

(iii) **negativ semidefinit,** falls $q_A(x) \le 0 \ \forall\, x \in I\!R^n$

(iv) **negativ definit,** falls $q_A(x) < 0 \ \forall\, x \in I\!R^n,\ x \ne 0$

(v) **indefinit,** falls A weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Für Definitheit gibt es zwei wichtige Kriterien:

Eigenwertkriterium:

A bzw. $q_A(x)$ ist

(i) positiv semidefinit $\iff$ alle Eigenwerte von A sind ≥ 0

(ii) positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte von A sind > 0

(iii) negativ semidefinit $\iff$ alle Eigenwerte von A sind ≤ 0

(iv) negativ definit $\iff$ alle Eigenwerte von A sind < 0

(v) indefinit $\iff$ A besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte.

Wir definieren nun Hauptminoren: $H_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$.

Hauptminorenkriterium:

A bzw. $q_A(x)$ ist

(i) positiv definit $\iff$ $H_k > 0 \ \forall\, k = 1, \ldots, n$

(ii) negativ definit $\iff$ $H_1 < 0,\ H_2 > 0,\ H_3 < 0$ usw.
(kurz: $(-1)^k H_k > 0 \ \forall\, k$.)