## Analysis II für Informatiker und Ingenieure — Blatt 11

**46.** Es seien $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass die Ellipse (4)

$$E := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

den Flächeninhalt $\pi ab$ besitzt.

**Hinweis:** Substituieren Sie $x = ar\cos\varphi$ und $y = br\sin\varphi$.

**47.** Berechnen Sie $m_x := \iint_M x \,\mathrm{d}(x, y)$, $m_y := \iint_M y \,\mathrm{d}(x, y)$ und $m := \iint_M 1 \,\mathrm{d}(x, y)$, wobei (6)

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x \right\}.$$

Geben Sie außerdem den Schwerpunkt $(m_x/m, m_y/m)^T$ dieser Menge an.

**48.** Berechnen Sie das Volumen des Torus (5)

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} (R + \sigma\sin\varphi)\cos\vartheta \\ (R + \sigma\sin\varphi)\sin\vartheta \\ \sigma\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \sigma \leq r,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}$$

für feste Radien $0 < r < R$.

**49.** Es sei $R > 0$ und (5)

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x, y, z \geq 0 \right\}.$$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\iiint_M \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}(x, y, z).$$