Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

19 Punkte

Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 12

50. Zeigen Sie, dass die durch (3)

$$f(x) := \int_1^2 \frac{\cos(xt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

gegebene Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

51. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf $[0,1]$ differenzierbar sind und bestimmen Sie deren Ableitung. (2x3)

(a) $f(x) := \displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $f(x) := \displaystyle\int_1^{1+x^2} \frac{\cos(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$

52. Entscheiden Sie, ob folgende Vektorfelder $f : G \to \mathbb{R}^n$ Gradientenfelder sind und bestimmen Sie ggf. eine Stammfunktion von f auf G. Berechnen Sie außerdem $\int_\gamma f$ für die jeweils angegebene Kurve γ. (2x3)

(a) Es sei $n = 3$, $G = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$, $\gamma : [0,2\pi] \to G$ gegeben durch $\gamma(t) := (\cos t, 2 + \sin t, t)^T$ sowie

$$f(x,y,z) := \left(z^2, \frac{e^z}{y} + y, 2xz + e^z \log y\right).$$

(b) Es sei $n = 2$, $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ und $f(x,y) := \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$, sowie $\gamma : [0,2\pi] \to G$ gegeben durch $\gamma(t) := (\sin t, \cos t)^T$.

53. Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sodass $(x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y))^T$ ein Gradientenfeld ist mit Stammfunktion U. Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ genau dann die Differentialgleichung (1+3)

$$f(t, v(t)) + g(t, v(t))v'(t) = 0$$

löst, wenn $U(t, v(t))$ auf (a,b) konstant ist.

Finde eine Lösung $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$2tv(t)^3 - e^t + 3t^2 v(t)^2 v'(t) = 0$$

mit $v(1) = 0$.