Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 5

19. Entwickeln Sie folgende Funktionen, falls möglich, jeweils in eine Potenzreihe um 0 und geben Sie ihren Konvergenzradius an. (4×2)

(a) $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(b) $\frac{-2x^2 + 6x - 7}{(x-2)^2(x-1)}$

(c) $\frac{1}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$

(d) $\operatorname{Arsinh}(x)$ (vgl. Aufgabe 2)

20. Berechnen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (als unendliche Reihe). (2)

21. Berechnen Sie (2+1)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

in Form einer unendlichen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und bestimmen Sie als Näherung für das Integral die Partialsumme $\sum_{k=0}^{4} a_k$. Können Sie abschätzen, wie gut diese Näherung ist?

22. Berechnen Sie den Grenzwert (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^5) - x^5}{x^7(1-\cos(x^4))}.$$

23. Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ eine Potenzreihe um a mit positivem Konvergenzradius. Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist die Potenzreihe also gleich der Taylorreihe der Funktion f. (2)

24. (Methode der erzeugenden Funktionen)

Eine Folge (a_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} &a_0 = 0,\ a_1 = 3 \\ &a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \end{aligned} \tag{R}$$

erklärt (also $a_2 = 21$, $a_3 = 117$ u.s.w.) Im Folgenden wollen wir eine explizite Formel für a_n bestimmen.

(a) Betrachten Sie die formale Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und versuchen Sie, aus (R) auf eine Darstellung für $f(x)$ herzuleiten. (Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{3x}{10x^2-7x+1}$) (2)

(b) Entwickeln Sie die Darstellung von $f(x)$ wieder in eine Potenzreihe und versuchen Sie, auf (a_n) zu schließen. (2)

(c) Kontrollieren Sie, dass Ihre Lösung der Gleichung (R) genügt. (1)