Analysis II für Informatiker und Ingenieure — Blatt 8

34. Sie möchten eine Wanderung von A nach B unternehmen. Der Einfachheit halber habe A die Koordinaten $(0,0)^T$ und B die Koordinaten $(1,1)^T$ und wir nehmen an, dass Sie auf dem direkten Weg entlang der Verbindungsstrecke $(t,t)^T$ $(0 \le t \le 1)$ gehen. Zwischen den Punkten A und B liegt ein Gebirge, dass der Gleichung $z = 600x(1-y)$ genügt. (2+2)

(a) Wo liegt der höchste Punkt, den Sie auf ihrer Wanderung erklimmen müssen?

(b) Wie lang ist der gesamte Weg dieser Wanderung? Schätzen Sie zuerst diese Länge und rechnen Sie dann! Hierzu dürfen Sie auch einen Computer verwenden.

35. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ soll in Kugelkoordinaten umgeschrieben werden, also $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$ und $z = r\sin\vartheta$. Wir betrachten also die Funktion (4)

$$g(r,\varphi,\vartheta) := f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta).$$

Wie rechnen sich ∇f und ∇g in einander um?

36. Gegeben sei eine implizite Fläche $\mathscr{F} = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\right\}$ mit einer differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Gradientenvektor $(\nabla F)^T$ senkrecht auf dieser Fläche steht. Genauer: Wann immer eine glatte Kurve $\gamma(t)$ auf $\mathscr{F}$ verläuft, so steht $(\nabla F)^T$ senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot\gamma(t)$. (2+1+1)

Verifizieren Sie dies anschließend an einem Punkt auf der Kugeloberfläche $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$ (für ein $R>0$) und auf der ebenen Fläche $F(x,y,z) = x+y-z$.

37. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^TAx + c^Tx$, wobei (4)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.

38. Bestimmen Sie den minimalen Abstand d der beiden Geraden (4)

$$G_1 := \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hinweis: Es ist bequemer, zunächst d^2 zu bestimmen.