Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 9

39. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$4x^3 + y^3 - xy - 4 = 0 \tag{K}$$

implizit gegebene Kurve. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Der Punkt $a = (1, 0)^T$ liegt auf der gegebenen Kurve. (1)

(b) Die Kurve lässt sich in einer Umgebung von a nach y auflösen, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Funktion $y : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, sodass $(x, y(x))$ für alle $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ die Gleichung (K) löst. (2)

(c) Die Funktion y ist in einer Umgebung von 1 streng monoton wachsend. (2)

40. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r, \varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\vartheta \\ r \sin\varphi \cos\vartheta \\ r \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Stellen an denen f lokal umkehrbar ist. (2)

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f an der Stelle (2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = f\left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

41. Berechnen Sie den minimalen Abstand der Parabel $y = x^2$ zu der Geraden $y = x - 1$ mit Hilfe des Satzes von Lagrange. Minimieren Sie dazu die durch (6)

$$f(x, y, u, v) := (x-u)^2 + (y-v)^2$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen $y - x^2 = 0$ und $v - u + 1 = 0$.

42. Es sei $M := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) := x + 2y - 3z$.

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktion f ihr Maximum und Minimum annimmt. (1)

(b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen von f in M (4)

(c) Bestimmen Sie, falls existent, $\max_M f$ und $\min_M f$. (1)