Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

Lösungen zur Klausur Analysis II für Ingenieure

1. (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := xe^{2x}$. (7)

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x$. (7)

Lösung:

(a) Mit partieller Integration erhält man

$$\int xe^{2x} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{e^{2x}}{2} \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x}.$$

(b) Mit der Substitution $u = \ln x$ erhält man

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \ln 2.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte. (12)

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x$

Lösung:

(a) Durch zweimalige Anwendung des Satzes von l'Hoptial erhält man

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Nach dem Satz von l'Hoptial ist

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} -x = 0.$$

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ gegeben.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f. (5)

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 0)^T$ in Richtung des Vektors $(1, 2)^T$. (6)

(c) Berechnen Sie die Hessematrix von f. (5)

(d) Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen von f. (6)

Lösung:

(a) Es ist $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$

(b) Wir setzen zunächst $v := (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$ und erhälten für die Richtungsableitung nun $\nabla f(1,0) \cdot v = (3,-3)v = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

(c) Es ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

(d) Es ist $\nabla f(x,y) = 0$ genau dann, wenn entweder $(x,y) = (0,0)$ oder $(x,y) = (1,1)$. Im ersten Fall ist

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit, weshalb $(0,0)$ keine Extremstelle ist, während im zweiten Fall

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Somit ist die einzige Extremstelle $(1,1)$ Stelle eines lokalen Minimums.

4. Es seien $B := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. (14)

(a) Skizzieren Sie die Menge B und geben Sie jeweils (ohne Begründung) an, ob sie abgeschlossen, offen, zusammenhängend und konvex ist.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint_M y \,\mathrm{d}(x,y)$.

Lösung:

(a) Die Menge ist abgeschlossen, nicht offen, zusammenhängend und konvex.

(b) Es ist

$$\iint_M y \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

5. Es ist bekannt (und muss nicht begründet werden), dass die Funktion $f(x,y) := 2x+3y$ unter der Nebenbedingung $x^2+4y^2 = 1$ ein Maximum annimmt. Bestimmen Sie diesen Wert. (12)

Lösung: Es sei $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ Maximumstelle von f unter der Nebenbedingung. Nach dem Satz von Lagrange existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda 2x = 2$ und $\lambda 8y = 3$. Insbesondere ist $x \neq 0$ und $\lambda = 1/x$. Also folgt $3x = 8y$ und wir erhalten aus der Nebenbedingung, dass

$$1 = x^2 + 4y^2 = x^2 + 4\left(\frac{3}{8}x\right)^2 = x^2 + \frac{9}{16}x^2 = \frac{25}{16}x^2.$$

Also ist $x = \pm 4/5$ und $y = 3/8x = \pm 3/10$. Also ist $f(4/5, 3/10) = 5/2$ das Maximum von f unter der gegebenen Nebenbedingung.

6. Entscheiden Sie, ob die durch $f(x,y,z) := (2xy, x^2+z, y+2z)$ gegebene Funktion ein Gradientenfeld auf $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie ggf. eine Stammfunktion von f. (14)

Berechnen Sie außerdem den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma f$ für die durch

$$\gamma(t) := (\ln(t^2+1), \sin(t/2), \cos^2(t) - 1)^T$$

gegebene Kurve $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$.

Lösung: Das f in der Tat ein Gradientenfeld ist sieht man entweder durch Nachprüfen der Integrabilitätsbedingungen oder durch Angabe der Stammfunktion

$$F(x,y,z) := x^2y + zy + z^2.$$

Für das Kurvenintegral ergibt sich somit der Wert

$$\int_\gamma f = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(\ln(\pi^2+1), 1, 0) - F(0,0,0) = \ln^2(\pi^2+1).$$

7. Lösen Sie das folgende System gewöhnlicher Differenzialgleichungen zum Anfangswert $x(0) = y(0) = 0$. (12)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) + 2 \\ \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Lösung: Durch Laplacetransformation erhält man die Gleichungen

$$s\hat{x}(s) = \hat{y}(s) + \frac{2}{s}$$
$$s\hat{y}(s) = \hat{x}(s)$$

und also

$$\hat{x}(s) = \frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s+1}.$$

Nach Rücktransformation ist $x(t) = e^t - e^{-t}$ und somit $y(t) = e^t + e^{-t} - 2$.