Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 20.04.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 13

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 1

1. Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Jede konvergente Folge in E ist eine Cauchy-Folge und jede Cauchy-Folge in E ist beschränkt. (2)

(b) Zeigen Sie für alle $x, y \in E$ die *Dreiecksungleichung nach unten*: $\|x-y\| \geq |\|x\|-\|y\||$. Folgern Sie sodann: Wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ gegen ein $x \in E$ konvergiert, dann konvergiert $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\|x\|$. (2)

2. Sei $\mathcal{C}^1 := \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ die Menge aller reellwertigen, stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Für jedes stetige $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ und für jedes $f \in \mathcal{C}^1$ sei $\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{C}^1, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Vektorraum, aber kein Banachraum. (2)

(b) $(\mathcal{C}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ ist ein Banachraum. (2)

Den Begriff der *Reihe* kennen Sie bereits aus der Analysis. In der Funktionalanalysis spielt er ebenfalls eine wichtige Rolle. Er ist folgendermaßen definiert:

Definition. Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei ein $x_k \in E$ gegeben. Unter der *Reihe* $\sum_{k=1}^\infty x_k$ verstehen wir die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ heißt *konvergent* wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, und in diesem Fall wird der Grenzwert dieser Folge ebenfalls mit $\sum_{k=1}^\infty x_k$ bezeichnet. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

3. (a) Sei $E = \ell^2 := \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $e_k \in \ell^2$ der k-te kanonische Einheitsvektor, d.h. es sei $(e_k)_j = 1$ für $j = k$ und $(e_k)_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$. (2)
Ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{e_k}{k}$ konvergent? Ist sie absolut konvergent?

(b) Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: E ist genau dann ein Banachraum, wenn jede absolut konvergente Reihe in E konvergiert. (3)