Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 27.04.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 12

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 2

4. Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $M \subseteq E$ eine beliebige Teilmenge. Die Menge M heißt *dicht* in E, wenn ihr Abschluss $\overline{M} := \{x \in E \mid \exists (x_n) \subseteq M : x_n \to x\}$ gleich E ist.

(a) Sei E ein Banachraum und $F \subseteq E$ ein dichter Untervektorraum. Zeigen Sie: F ist genau dann ein Banachraum bezüglich der von E induzierten Norm, wenn $F = E$ gilt. (1)

(b) Sei $c_0 := c_0(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ wie üblich mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ausgestattet und sei $c_{00} := c_{00}(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass nur endlich viele x_n von Null verschieden sind. Offensichtlich ist c_{00} ein Untervektorraum von c_0. (2)

Liegt c_{00} dicht in c_0? Ist $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum?

(c) Der normierte Vektorraum E heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge in E gibt. Zeigen Sie: Wenn eine abzählbare Menge $A \subseteq E$ existiert, deren lineare Hülle dicht in E ist, dann ist E separabel. (2)

(d) Sei M eine unendliche Menge und sei $E = \mathcal{F}_\mathrm{b}(M; \mathbb{K})$ wie üblich mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ausgestattet. Zeigen Sie, dass E nicht separabel ist. (3)

Tipp: Verwenden Sie, dass die Potenzmenge einer unendlichen Menge immer überabzählbar ist.

5. Sei $1 \leq p \leq q < \infty$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Für diese Aufgabe benutzen wir die Abkürzungen $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ und $L^p := L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{K})$; die Abkürzungen ℓ^q und L^q werden analog dazu benutzt.

(a) Zeigen Sie: Es ist $\ell^p \subseteq \ell^q$ und für alle $f \in \ell^p$ gilt $\|f\|_q \leq \|f\|_p$. (2)

(b) Zeigen Sie: Es ist $L^q \subseteq L^p$ und es gibt eine Zahl $C \geq 0$ derart, dass $\|[f]\|_p \leq C\,\|[f]\|_q$ für alle $[f] \in L^q$ gilt. (2)