Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 25.04.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 13

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 6

13. Seien E, F Banachräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(a) Zeigen Sie: Wenn E unendlich-dimensional ist, dann ist jede Basis von E überabzählbar. (3)

(b) Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E;F)$ eine Folge von beschränkten linearen Operatoren von E nach F. Für jedes $x \in E$ existiere der Grenzwert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ in F. Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(E;F)$ gilt. (3)

Definition. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *Sesquilinear-Form* (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch *Bilinear-Form*), wenn

$$\begin{aligned} & a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x,z) + \beta a(y,z) \\ \text{und} \quad & a(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} a(z,x) + \overline{\beta} a(z,y) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt.

14. (a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $a : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinear-Form. Zeigen Sie die *Polarisationsgleichung*, d.h. die Gleichung (2)

$$2a(x,y) + 2a(y,x) = a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und die Gleichung

$$4a(x,y) = \sum_{k=0}^{3} i^k a(x + i^k y, x + i^k y) \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.

(b) Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt *selbst-adjungiert*, wenn $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ für alle $x, y \in H$ gilt. (3)

Sei nun $A \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator, der die Bedingung $\langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle$ für alle $x \in H$ erfüllt. Zeigen Sie: Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, so folgt aus der vorangehenden Bedingung bereits, dass A selbst-adjungiert ist. Gilt dieselbe Aussage auch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Tipp: Zeigen sie zunächst, dass $a(x,y) := \langle x, Ay \rangle - \langle Ax, y \rangle$ eine Sesquilinear-Form auf H ist.

(c) Sei nun $H = \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ mit dem üblichen Skalarprodukt ausgestattet, sei $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{C})$ und sei $A \in \mathcal{L}(H)$ durch $A(f_n) = (\lambda_n f_n)$ für alle $f = (f_n) \in H$ gegeben. (2)

Charakterisieren Sie, wann A selbst-adjungiert ist.