Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 01.06.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 13

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 7

15. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass Satz 13 aus der Vorlesuung nicht auf beliebigen Banachräumen stimmt.

(a) Sei $E = c_0(\mathbb{N};\mathbb{R})$ die Menge aller reellwertigen, gegen 0 konvergenten Folgen. Dieser Raum wird zu einem Banachraum, wenn wir ihn mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm versehen. Wir setzen $A \coloneqq \{x \in E|\ \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n} = 1\}$. (3)

Zeigen Sie, dass A eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E ist, aber kein Element mit minimaler Norm besitzt.

(b) Sei $E = L^1([0,1];\mathbb{R})$ und sei $A \coloneqq \{f \in E|\ \int f\,dx \geq 1\}$. (3)

Zeigen Sie, dass A eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E ist und mehr als ein Element mit minimaler Norm besitzt.

16. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

(a) Seien $x_1, x_2 \in H$. Zeigen Sie: Es ist $x_1 = x_2$ genau dann, wenn $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle$ für alle $y \in H$ gilt. (2)

Folgern Sie: Sind $A, B \in \mathcal{L}(H)$ und gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle$ für alle $x, y \in H$, so ist $A = B$.

(b) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und seien $A, B \in \mathcal{L}(H)$ derart, dass $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ für alle $x \in H$ gilt. Zeigen Sie, dass $A = B$ ist. (1)

17. Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie: Jedes Orthogonalsystem in H ist linear unabhängig. (1)

(b) Sei nun $H = L^2([-1,1];\mathbb{R})$ und sei $V \subseteq H$ der Aufspann der drei Monome $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ und $x \mapsto x^2$. Sei $f \in H$ durch $f(x) = e^x$ gegeben. (3)

Finden Sie ein Orthonormalsystem in H, dessen lineare Hülle gleich V ist. Berechnen Sie anschließend denjenigen Vektor $g \in V$, für welchen der Abstand $\|f - g\|_2$ minimal ist.