Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 08.06.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 13

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 8

18. Sei $H = L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sei $e_k : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ durch $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ gegeben. Wir setzen $\mathcal{C}_{\text{per}} := \{f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi];\mathbb{C}) |\ f(-\pi) = f(\pi)\}$. Zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist $\mathcal{C}_{\text{per}}$ ein Banachraum. In dieser Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis die folgenden beiden Aussagen verwenden:

- Die lineare Hülle der Menge $\{e_k |\ k \in \mathbb{Z}\}$ liegt dicht im Banachraum $(\mathcal{C}_{\text{per}}, \|\cdot\|_\infty)$ (dies folgt beispielsweise aus dem Approximationssatz von Stone–Weierstraß oder aus dem Satz von Fejér).
- Die Menge $\{[f] |\ f \in \mathcal{C}_{\text{per}}\}$ liegt dicht in H (dies kann man mit ähnlichen Argumenten wie in Aufgabe 12 auf Blatt 5 zeigen).

(a) Zeigen Sie: Die Menge $\{[e_k] |\ k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis von H. (3)

(b) Sei $[f] \in H$. In der sogenannten *Harmonischen Analyse* verwendet man den folgenden Begriff: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ nennt man die Zahl $f_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) e^{-ikx}\, dx$ den k-ten *Fourier-Koeffizienten* von $[f]$. (1)
Zeigen Sie, dass die sogenannte *Fourier-Reihe* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k [e_k]$ in H gegen $[f]$ konvergiert.

(c) Sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ durch $f(x) = x$ gegeben. Wenden Sie die Parsevalsche Gleichung auf die Orthonormalbasis $\{[e_k] |\ k \in \mathbb{Z}\}$ von H und den Vektor $[f] \in H$ an um die Formel $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zu beweisen. (2)

19. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$, seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei $(\Omega, \Sigma, \mu) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ der zugehörige Produkt-Maßraum. Die $\mathbb{K}$-wertigen L^2-Räume auf diesen Maßräumen seien jeweils mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.

(a) Sei $[f] \in L^2(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1; \mathbb{K})$ und $[g] \in L^2(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2; \mathbb{K})$. Zeigen Sie: Die Funktion (3)

$$f \otimes g : \Omega \to \mathbb{K}, \qquad (f \otimes g)(\omega_1, \omega_2) := f(\omega_1) g(\omega_2)$$

ist messbar, ihre Äquivalenzklasse $[f \otimes g]$ hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten f und g ab und es gilt $[f \otimes g] \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{K})$. Zudem gilt $\|[f \otimes g]\|_2 = \|[f]\|_2\, \|[g]\|_2$.

(b) Sei $([e_j])_{j\in J}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1; \mathbb{K})$ und $([f_k])_{k\in K}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2; \mathbb{K})$, wobei K höchstens abzählbar sei. Zeigen Sie, dass dann $([e_j \otimes f_k])_{(j,k)\in J\times K}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{K})$ ist. (4)