Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 22.06.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 12

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 10

Sei E ein Banachraum und sei $f : \mathbb{R} \to E$. Die Funktion f heißt *differenzierbar im Punkt* $t \in \mathbb{R}$, wenn der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ existiert. In diesem Fall bezeichnet man den Grenzwert mit $\frac{d}{dt}f(t)$ und nennt ihn die *Ableitung* von f in t.
Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

22. Sei E ein reeller oder komplexer Banachraum und sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Für jedes $B \in \mathcal{L}(E)$ definieren wir

$$(*) \qquad e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe in $(*)$ im Banachraum $\mathcal{L}(E)$ absolut konvergiert. Zeigen Sie zudem, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$, $t \mapsto e^{tA}$ differenzierbar ist und dass $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. (3)

(b) Sei $x_0 \in E$ und sei $x : \mathbb{R} \to E$, $x(t) = e^{tA}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x differenzierbar ist und das Anfangswertproblem (1)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = Ax(t), \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

löst.

Zusatzinformation: Man kann zeigen, dass für alle $A, B \in \mathcal{L}(E)$ mit der Eigenschaft $AB = BA$ die Gleichung $e^{A+B} = e^A e^B$ erfüllt ist. Diese Zusatzinformation dürfen Sie in der nächsten Aufgabe verwenden.

23. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt *schief-adjungiert*, wenn $A^* = -A$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Jeder Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ lässt sich als Summe eines selbst-adjungierten und eines schief-adjungierten Operators schreiben. (2)

(b) In dieser Teilaufgabe sei der Skalarkörper komplex. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie: A ist genau dann selbst-adjungiert, wenn iA schief-adjguniert ist, und A is genau dann schief-adjungiert, wenn iA selbst-adjungiert ist. (1)

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie: A ist genau dann schief-adjungiert, wenn e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist. (3)

(d) Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Zudem gebe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Skalar λ_n mit der Eigenschaft $Ae_n = \lambda_n e_n$. (2)
Zeigen Sie: Für alle $x_0 \in H$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $e^{tA}x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{t\lambda_n}\langle x_0, e_n\rangle e_n$.