Universität Ulm
Abgabe: Mittwoch, 29.06.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 12

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 11

24. Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (2)

- (i) H ist separabel.
- (ii) Jede Orthonormalbasis von H ist höchstens abzählbar.
- (iii) Es gibt eine Orthonormalbasis von H, die höchstens abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (1)

- (i) H is endlich-dimensional.
- (ii) Jede Orthonormalbasis von H ist endlich.
- (iii) Es gibt eine endliche Orthonormalbasis von H.

(c) Zeigen Sie: Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B} := \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ in H ist genau dann kompakt, wenn H endlich-dimensional ist. (3)

Zusatzinformation: Man kann zeigen, dass die Äquivalenz in (c) sogar für jeden Banachraum richtig ist; dazu benötigt man allerdings ein zusätzliches Hilfsmittel, das sogenannte Rieszsche Lemma.

25. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(a) Zeigen Sie: Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann invertierbar, wenn seine Adjungierte A^* invertierbar ist, und in diesem Fall gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (2)

Folgern Sie hieraus, dass im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Gleichheit $\sigma(A^*) = \{\overline{\lambda} | \, \lambda \in \sigma(A)\}$ gilt.

Sei nun $H = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$. Es sei $L : H \to H$, $L(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...)$ der sogenannte Links-Shift und $R : H \to H$, $R(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ der sogenannte Rechts-Shift.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von L und von R. (2)

(c) Berechnen Sie das Spektrum von L und von R. (2)