Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 06.07.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 11

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 12

26. Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum, seien $V, W \subseteq H$ Untervektorräume von H und sei V abgeschlossen. Wir definieren wie üblich $V + W := \{v + w : \; v \in V, \, w \in W\}$.

(a) Zeigen Sie: Wenn W eindimensional ist und im orthogonalen Komplement von V liegt, dann ist $V + W$ abgeschlossen. (2)

(b) Zeigen Sie: Wenn W eindimensional ist, dann ist $V + W$ abgeschlossen. (2)

(c) Zeigen Sie: Wenn W endlich-dimensional ist, dann ist $V + W$ abgeschlossen. (1)

Zusatzinformation: Mit anderen Argumenten kann man zeigen, dass diese Aussage auch auf Banachräumen stimmt.

27. Wir betrachten den komplexen Hilbertraum $H := \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$. Sei $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ und sei $M_\alpha \in \mathcal{L}(H)$ der Multiplikator mit Symbol α, d.h. es sei $M_\alpha x = (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in H$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und das Spektrum von M_α. (2)

(b) Zeigen Sie: Eine beschränkte Teilmenge $S \subseteq H$ besitzt genau dann kompakten Abschluss, wenn (2)

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{x \in S} \sum_{k=m}^{\infty} |x_k|^2 = 0$$

gilt.

(c) Charakterisieren Sie, wann der Operator M_α kompakt ist. (2)