Die Übungsblätter sind von jedem Teilnehmer einzeln zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 21.06.2016

Dr. G. Baur
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2016
Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Serie 3

1. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma \subset D$ eine stückweise glatte Kurve und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine beliebige stetige Funktion in D. Beweisen Sie die folgende Aussage: (4)

$\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ ist wegunabhängig in $D \Leftrightarrow \oint_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$ für alle geschlossenen Kurven $\gamma \subset D$.

2. Berechnen Sie für die Kurven $\gamma \in \{C_1(i), C_1(-i), C_2(0)\}$ jeweils das Integral (6)

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z,$$

Bemerkung: $C_R(w)$ bezeichnet den positiv orientierten Kreis mit Radius R um w.

3. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_C z^3\,\mathrm{d}z$ und $\int_C \bar{z}^3\,\mathrm{d}z$ für die beiden Fälle, dass (6)

(a) C die Strecke von $z_1 = 2$ nach $z_2 = -2i$ ist;

(b) C der Bogen des Kreises mit Radius 2 um den Nullpunkt im vierten Qudranten von $z_1 = 2$ nach $z_2 = -2i$ ist.

Geben Sie jeweils eine Parametrisierung der Kurve C für die Fälle (a) und (b) an.

4. Formulieren Sie analog zum Lemma von Goursat für Dreiecke ein Lemma für Vierecke. Beweisen Sie dieses Lemma ohne Verwendung des bisher bekannten Lemmas von Goursat für Dreiecke. (9)

5. (a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere offene Menge und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph in D. Seien weiter $a, b \in D$ und $\gamma \subset D$ eine Kurve in D von a nach b. Beweisen Sie die folgende Abschätzung: (3)

$$|f(b) - f(a)| \le \sup_{z \in \mathcal{T}(\gamma)} \left|f'(z)\right| \cdot l(\gamma).$$

(b) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die obige Abschätzung im Allgemeinen nicht verschärft werden kann zu der Aussage: (2)

$$\exists \xi \in \mathcal{T}(\gamma)\colon\ |f(b) - f(a)| = \left|f'(\xi)\right| \cdot l(\gamma).$$