Die Übungsblätter sind von jedem Teilnehmer einzeln zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 28.06.2016

Dr. G. Baur
Marie-Luise Hein

Sommersemester 2016
Punktzahl: 34

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Serie 4

1. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und gelte $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. (4)
Beweisen Sie, dass f konstant ist.

2. Seien $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ und f ganz mit (4)

$$|f(z)| \le C\,|z|^n\,, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom maximalen Grad n ist.

3. Sei P ein komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit den (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C}$. (10)

(a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-\zeta_1} + \ldots + \frac{1}{z-\zeta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z-\zeta_i}}{|z-\zeta_i|^2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von P' in der konvexen Hülle von $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ liegen, d. h. zu jeder Nullstelle ζ von P' gibt es nicht-negative reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_k = 1 \quad \text{und} \quad \zeta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \zeta_k$$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes oder der Cauchyschen Integralformel. (16)

$$(a)\ \oint_{C_3(0)} \frac{\cos(\pi\zeta)}{\zeta^2-1}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad (b)\ \oint_{C_3(0)} \frac{\mathrm{e}^{-\zeta}}{(\zeta+2)^3}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad (c)\ \oint_{C_1(2)} \frac{\zeta^7+1}{\zeta^2(\zeta^4+1)}\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$(d)\ \oint_{C_1(i)} \frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^2+1}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad (e)\ \oint_{C_3(0)} \frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^2+1}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad (f)\ \oint_{C_1(1)} \frac{\zeta^n}{(\zeta-1)^n}\,\mathrm{d}\zeta,\ n \in \mathbb{N},$$

$$(g)\ \oint_{C_5(0)} \frac{1}{\cos(i)-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad (h)\ \oint_{C_3(2)} \frac{\mathrm{e}^{i\sin\zeta}\cos(\zeta^7+1)-\zeta^2}{(\zeta-7)^{37}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Aufgabe 4 von Serie 3:
Formulieren Sie analog zum Lemma von Goursat für Dreiecke ein Lemma für Rechtecke. Beweisen Sie dieses Lemma ohne Verwendung des bisher bekannten Lemmas von Goursat für Dreiecke.