Die Übungsblätter sind von jedem Teilnehmer einzeln zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 05.07.2016

Dr. G. Baur
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2016
Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Serie 5

1. Es ist bekannt, dass $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. (3)
Beweisen Sie: Es gibt keine Folge von Polynomen, die kompakt gegen $f(z)$ in D konvergiert.

2. Es sei

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

und $E := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass f holomorph auf E ist. (3)

(b) Zeigen Sie, dass f unendlich-viele Nullstellen in E besitzt. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Satz 19? (2)

3. Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$. Die (komplexwertige) Gammafunktion $\Gamma \colon D \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Γ-Funktion auf D holomorph ist. (5)
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(z) = \int_{1/n}^n \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$ kompakt in D gegen $\Gamma(z)$ konvergiert. Die Konvergenz der reellen Γ-Funktion darf als bekannt vorausgesetzt werde.

(b) Beweisen Sie die Funktionalgleichung der Γ-Funktion: (5)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

4. (a) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f(z) = \frac{1}{2-z}$ jeweils in den Punkten $z_0 \in \{0, i\}$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist und bestimmen Sie a priori den Konvergenzradius. Bestätigen Sie ihre Vermutung durch Bestimmung der Entwicklung und der Berechnung des zugehörigen Konvergenzradius. (6)

(b) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ im Punkt $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist und geben Sie den Konvergenzradius an. (3)

5. Wir betrachten den Ausdruck (3)

$$L(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)} \, \mathrm{d}t.$$

Berechnen Sie $L(x)$ für $x > 0$. Bestimmen Sie eine maximale holomorphe Fortsetzung von L und geben Sie das zugehörige Holomorphiegebiet an.