Die Übungsblätter sind von jedem Teilnehmer einzeln zu bearbeiten und **vor Beginn** der Übung abzugeben!

Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 12.07.2016

Dr. G. Baur
Marie-Luise Hein
Sommersemester 2016
Punktzahl: 40

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Serie 6

1. Es sei $E = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$, $f\colon E \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ für alle $z \in E$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in E$ gilt: $|f(z)| \leq |z|$. (4)

2. Bestimmen Sie die Art der Singularität folgender Funktionen an der Stelle z_0: (8)

(a) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$, $\quad z_0 = 1$,

(b) $f(z) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^z}$, $\quad z_0 = 2\pi i$,

(c) $f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$, $\quad z_0 = \frac{\pi}{4}$,

(d) $f(z) = \Gamma(z)$, $\quad z_0 = 0$.

3. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Funktion f habe bei z_0 einen Pol der Ordnung m und die Funktion g habe bei z_0 einen Pol der Ordnung p. Was ist z_0 für $f \pm g$, $f \cdot g$, $f/g\ (g \not\equiv 0)$? (4)

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{z-1}{z(z-i)}$ auf den Gebieten (6)

(a) $G_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < 1\}$,

(b) $G_2 = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z-i| < 1\}$,

(c) $G_3 = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}$,

in eine Laurentreihe.

5. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale (18)

$$(a)\ \oint_{C_1(0)} \frac{1-\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z, \qquad (b)\ \oint_{C_1(0)} \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z, \qquad (c)\ \oint_{C_1(0)} \frac{z^3}{1-\cos z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$(d)\ \oint_{C_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{z-1}{z(z-i)}\,\mathrm{d}z, \qquad (e)\ \oint_{C_{\frac{3}{2}}(2i)} \frac{z-1}{z(z-i)}\,\mathrm{d}z, \qquad (f)\ \oint_{C_5(i)} \frac{z-1}{z(z-i)}\,\mathrm{d}z,$$

$$(g)\ \oint_{C_2(0)} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{z^2+z}\,\mathrm{d}z, \qquad (h)\ \oint_{C_2(0)} \frac{z^2}{\cos z}\,\mathrm{d}z, \qquad (i)\ \oint_{C_{\frac{1}{2}}(0)} \Gamma(z)\,\mathrm{d}z.$$