(5) Wir entfernen alle Intervalle, die komplett in einem anderen enthalten sind.

Wir beschreiben einen Startzustand, einen induktiven Algorithmus zum Konstruieren von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ und die verwendeten Invarianten.

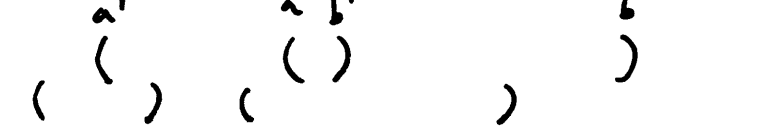
Start:
$\mathcal{F}_1 = \{I\}$, $\mathcal{F}_2 = \{0\}$, $\mathcal{F}_1$ sei die aktive Familie und I sei das Intervall mit dem (aktuell) linken Endpunkt.

Invarianten:
1) Die aktive Familie enthält das zuletzt hinzugefügte Intervall
2) ——— " ——— ragt am weitesten nach rechts (oder weiter als die andere Familie)
3) Alle $x \in \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ welche links von dem rechten Ende der aktiven Familie sind, werden bereits von $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ überdeckt.
4) Die Intervalle in $\mathcal{F}_1$ bzw $\mathcal{F}_2$ sind paarweise disjunkt.

Schritt: a) Wir entfernen alle Intervalle, die von $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ überdeckt (komplett) werden

b) Sei (a,b) ein verbleibendes Intervall (~ sonst fertig) mit a minimal

Fall 1: (a,b) ist disjunkt zur aktiven Familie.
~ füge (a,b) zur aktiven Familie hinzu und gehe zum nächsten Schritt.

Fall 2: (a,b) schneidet aktive Familie.
Ersetze nun (a,b) durch das verbleibende Intervall, welches die aktive Fam. noch schneidet, aber möglichst großen rechten Endpunkt hat.
Füge nun dieses Intervall zu der anderen Fam. hinzu und mache diese aktiv. Gehe zum nächsten Schritt.

Es ist klar, dass in Fall 1 alle Invarianten intakt bleiben.
In Fall 2 sind Invarianten 1) und 2) klar. Auch 3) gilt weiterhin.
Es braucht also nur noch 4) verifiziert werden. Sei also (a,b) das o.B.d.A zur $\mathcal{F}_2$-hinzugefügte Intervall, (a',b') das im vorigen Schritt zur $\mathcal{F}_1$ hinzugefügte Intervall. Es gilt $a' < a < b' < b$. Falls aber (a,b) $\mathcal{F}_2$ schneidet, dann war (a',b') im vorigen Schritt nicht disjunkt zu $\mathcal{F}_2$.
Dann wäre aber (a,b) eine bessere Wahl als (a',b') für $\mathcal{F}_1$ gewesen. ↯
Damit gilt auch 4) weiterhin.