Universität Ulm

Besprechung: Montag, 19.10.15

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 1

1. (a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Zeige: $Mf \colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist messbar.

(b) Bestimme Mf für $f = \mathbb{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$.

(c) Zeige: Wenn $(Mf)(x_0) = 0$, dann gilt $f = 0$ f.ü.

2. Zeige: $Mf \in L^1(\mathbb{R}^d)$ genau dann wenn $f = 0$ f.ü.

3. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt

$$\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu([|f| > t]) \,\mathrm{d}t.$$

4. Wenn $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, dann ist $F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$ f.ü. differenzierbar auf (a,b) mit $F' = f$.

5.* Seien $I_1, \ldots, I_N$ offene Intervalle in $\mathbb{R}$. Dann gibt es Teilfamilien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ dieser Intervalle derart, dass die beiden Teilfamilien jeweils nur paarweise disjunkte Intervalle enthalten und

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = \dot{\bigcup} \mathcal{F}_1 \cup \dot{\bigcup} \mathcal{F}_2$$

gilt. Beachte, alle Punkte in den I_k weden von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zusammen überdeckt, und das höchstens zweifach.