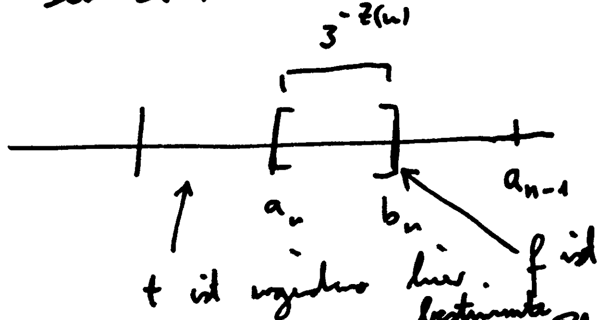
|4*|

Sei $t \in [0,1]$ ein Punkt aus der Cantormenge, der kein Randpunkt eines der entfernten offenen Intervalle ist.

$t = 0.t_1 t_2 \cdots$ Ternärdarstellung

Sei $z(n)$ der Index der $n$-ten 0 in der Ternärdarstellung




$a_n = .t_1 \cdots t_{z(n)-1} 1$

$b_n = .t_1 \cdots t_{z(n)-1} 2$

Wir beschreiben so ~~alle~~ bestimmte Plateaus von $f$ rechts von $t$.

1. Beh: $$D f_+(t) = \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(b_n)-f(t)}{b_n - t}}_{=:\, Q_n}$$

Da $f$ konstant auf $[a_n, b_n]$ ist, folgt

$$Q_n \le \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \quad \forall x \in [a_n, b_n]$$

Es genügt also zu zeigen, dass, zumindest für $n$ groß,

$$Q_n \le \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \quad \forall x \in (b_n, a_{n-1}).$$

Da $a_{n-1} = .t_1 \cdots t_{z(n-1)-1} 1$ und

$b_n = .t_1 \cdots t_{z(n-1)-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Index } z(n-1)}}{0}\, 2 \cdots 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Index } z(n)}}{2}$

gilt $a_{n-1} - b_n = 3^{-z(n)}$.

Wir wollen also $\forall h \in (0, 3^{-z(n)})$

$$\frac{f(b_n+h) - f(t)}{b_n + h - t} \ge Q_n$$

$$\iff \frac{f(h)}{h} \cdot (b_n - t) \ge f(b_n) - f(t),$$ da $f(b_n+h) = f(b_n)+h$,

denn auf $(b_n, a_{n-1})$ ist $f$ gleich an $f|_{(0,3^{-z(n)})} + f(b_n)$ wegen der selbstähnlichen Konstruktion der Cantor-Funktion.

Es genügt also zu zeigen, dass $\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h} = \infty$, bzw.

$D^+ f(0) = D_+ f(0) = \infty$.

2. Beh.: $D^+f(0) = D_+f(0) = \infty$.

Sei $(h_n) \downarrow 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(h_n)}{h_n} = D_+f(0)$.

Für jedes $n$ wähle $N = N(n)$: $3^{-N} \le h_n < 3^{1-N}$

Dann gilt $\frac{f(h_n)}{h_n} \ge \frac{f(3^{-N})}{3^{1-N}} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^N$.

Die 2. Beh. (und damit auch die 1. Beh.) folgt nun wegen $N(n) \to \infty$ für $n \to \infty$.

Analog gilt auch für alle rechten Endpunkte der entfernten Intervalle, dass dort $D^+f = D_+f = \infty$.

Im inneren und an linken Endpunkt der entfernten Intervalle gilt natürlich $D^+f = D_+f = 0$.

3. Beh.: Sei $t$ weiter wie anfangs. Dann gilt $Df^+(t) = \infty$.

(Insbesondere gilt also immer $Df^+ \in \{0, \infty\}$.)

Mit der Notation von 1. gilt $\frac{f(a_{n-1}) - f(t)}{a_{n-1} - t} \ge \frac{2^{-z(n)}}{3 \cdot 3^{-z(n)}} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{z(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Wir beschreiben nun die Situation in 1. noch etwas präziser:

Es gilt
$$Q_n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-z(n+k)}}{3^{-z(n)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-z(n+k)}} = \frac{3^{z(n)}}{2^{z(n+1)}} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(z(n+k)-z(n+1))}}{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-(z(n+k)-z(n))}}$$

Offenbar gilt
$$\frac{1}{2}\frac{3^{z(n)}}{2^{z(n+1)}} \le \frac{1}{\left(1+3^{1-(z(n+1)-z(n))}\right)} \frac{3^{z(n)}}{2^{z(n+1)}} \le Q_n \le 2\frac{3^{z(n)}}{2^{z(n+1)}}.$$

Das bedeutet also, wenn man $t$ so wählt, dass $z(n+1) - z(n) \to \infty$, dann gilt $\liminf_{n\to\infty} Q_n = \liminf_{n\to\infty} \frac{3^{z(n)}}{2^{z(n+1)}} = D_+f(t)$.

Es ist klar, dass $z(n)$ zusätzlich so gewählt werden kann, dass $D_+f(t) \in (0,\infty)$. Zum Beispiel setze $z(1) = 1$ und gegeben $z(n)$ wähle $d \in \mathbb{N}_{>0}$, dass $\left(\frac{3}{2}\right)^{z(n)} \le 2^{d_n}$ und $d$ minimal. $z(n+1) := z(n) + d_n \to \infty$, und damit $d_n \to \infty$. Dann gilt $d \ge 1$, also $z(n+1) - z(n) \to \infty$. Zudem gilt $\frac{1}{2} \le \frac{3^{z(n)}}{2^{z(n+1)}} \le 1$. Wegen obiger Abschätzung gilt $D_+f(t) \in \left(\frac{1}{4}, 2\right)$.

Aus Symmetriegründen ($f(t) = 1 - f(1-t)$) gelten obige Resultate analog genauso für $D^-f$ und $D_-f$. Die Dini-Ableitungen $D_+f$ und $D_-f$ nehmen also Werte ungleich $0, \infty$ an.