Sei $\mathcal{G} = \{ Q = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d \}$ die Sammlung aller beschränkten, linksseitig offenen Quader

Nach Def. gilt $\lambda^*(A) = \inf\{ \sum_k \lambda_0(A_k) : (A_k) \text{ in } \mathcal{R},\ A \subset \bigcup_k A_k \}$,
$\mathcal{R}$ der Ring aller endl. Vereinigungen von Quadern in $\mathcal{G}$.

Wir zeigen: $\lambda^*(A) = \inf\{ \sum_k \lambda_0(Q_k) : (Q_k) \text{ in } \mathcal{G} \text{ disjunkt},\ A \subset \bigcup_k Q_k \}$ (1)

Es genügt dann zu zeigen, dass wir für $Q_1, Q_2 \in \mathcal{G}$
$Q_2 \setminus Q_1$ immer als endl. disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben können.
Das ermöglicht $A_k \in \mathcal{R}$ als disjunkte endl. Vereinigung von Quadern in $\mathcal{G}$ zu schreiben.
Zudem, wenn wir bereits endl. viele disj. Quader gewählt haben, so können wir jeden weiteren Quader in endl. viele Quader zerlegen, die entweder bereits gewählt wurden, oder disjunkt zu den gewählten Quadern sind. (2)

$\Rightarrow \bigcup_k A_k = \dot{\bigcup_j} Q_j, \quad \sum_k \lambda_0(A_k) = \sum_j \lambda_0(Q_j)$

da λ_0 ein Prämaß ist und Umordnungen positiver Reihen weder Konvergenz noch Grenzwert ändern.

Da $Q_2 \setminus Q_1 = Q_2 \setminus \underbrace{(Q_1 \cap Q_2)}_{\in \mathcal{G}}$, können wir auch o.B.d.A. $Q_1 \subset Q_2$ annehmen.

Sei $Q_1 = (a, b] \times Q_1'$ und $Q_2 = (e, f] \times Q_2'$.
Es gilt $(a, b] \subset (e, f]$ und $Q_1' \subset Q_2'$.
Zudem gilt $Q_2 = \underbrace{(e, a] \times Q_2' \ \dot\cup\ (b, f] \times Q_2'}_{\text{disjunkt zu } Q_1} \ \dot\cup\ \underbrace{(a, b] \times Q_2'}_{\text{enthält } Q_1,\ Q_1' \subset Q_2'}$

Falls $d = 1$, wären wir nach dieser Zerlegung fertig.
Allgemein bekommen wir nun die Beh. $Q_2 = \dot{\bigcup_{k=1}^{N}} Q_k^{(2)} \ \dot\cup\ Q_1$
induktiv über die Dimension (wende die Induktionshypothese auf $Q_1' \subset Q_2'$ an).
Damit folgen (2) und (1).