Übungen Geometrische Analysis: Blatt 5

1. (a) Zeige, dass $\mathcal{H}^0$ das Zählmaß in $\mathbb{R}^d$ ist.

(b) Seien $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $A \subset \mathbb{R}^d$, $L \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonal und $0 \leq s < \infty$. Zeige, dass $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(LA + x)$.

(c) Seien $0 \leq s < t < \infty$ und $\delta > 0$. Zeige, dass ein $C = C(t,s) > 0$ existiert mit

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq C\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A).$$

2. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ und $0 \leq s < \infty$. Zeige, wenn $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ für ein $\delta \in (0,\infty)$ gilt, dann folgt $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ gegeben.

(a) Zeige: Wenn f L-Lipschitz ist, dann gilt $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s\mathcal{H}^s(A)$.

(b) Zeige, dass $\dim_{\mathcal{H}} \operatorname{gr}(f|_A) \geq d$ falls $\mathcal{H}^d(A) > 0$.

(c) Zeige, dass $\dim_{\mathcal{H}} \operatorname{gr}(f|_A) = d$ falls $\mathcal{H}^d(A) > 0$ und f Lipschitz ist.

Hinweis: Zerlege einen Würfel mit Seitenlänge 1 in m^d Würfel mit Seitenlänge $\frac{1}{m}$. Sei Q_k ein solcher kleiner Würfel. Schätze nun das $\mathcal{H}^d_\delta$-Maß von $\operatorname{gr}(f|_{A\cap Q_k})$ für geeignete $\delta = \delta(m) > 0$ ab.

4.* Sei $\nu \in \partial\mathbb{B}_d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Zeige, dass die Steiner-Symmetrisierung $S_\nu(A)$ kompakt ist.