UNIVERSITÄT ULM

Besprechung: Montag, 23.11.15

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 6

1. Wir verwenden die Notation wie im $5r$-Überdeckungssatz (Theorem 1.1). Insbesondere sei $\mathscr{F}$ also die dort konstruierte abzählbare disjunkte $5r$-Überdeckung. Sei zudem $A \subset \mathbb{R}^d$ mit

$$\inf\{\operatorname{diam} B : x \in B \text{ und } B \in \mathscr{G}\} = 0$$

für alle $x \in A$ gegeben. Zeige, für alle endlichen Auswahlen $B_1, \dots, B_N \in \mathscr{G}$ gilt, dass

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j \subset \bigcup_{B \in \mathscr{F} \setminus \{B_1, \dots, B_N\}} \hat{B}.$$

2. Sei $0 < s \leq d$. Zeige, dass $\mathcal{H}^s$ keine Atome hat und darüber hinaus gilt, dass wenn $\infty > \mathcal{H}^s(A) > 0$ für ein $A \subset \mathbb{R}^d$, dann existiert ein $B \subset A$ mit $0 < \mathcal{H}^s(B) < \mathcal{H}^s(A)$.

Beachte: Für ein Maß μ ist eine messbare Menge A definitionsgemäß genau dann ein Atom, falls für alle messbaren $B \subset A$ gilt, dass $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \setminus B) = 0$.

3. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine $\mathcal{H}^s$-messbare Menge mit $\mathcal{H}^s(A) < \infty$.

(a) Sei $r > 0$. Zeige, dass $x \mapsto \mathcal{H}^s(A \cap B(x,r))$ von unten halbstetig und damit Borel-messbar ist. Zeige, dass diese Abbildung im Allgemeinen nicht stetig ist!

(b) Zeige: $x \mapsto \overline{\Theta}^s(A,x)$ und $x \mapsto \underline{\Theta}^s(A,x)$ sind Borel-messbar.

4. (a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ gegeben, beide $\mathcal{H}^s$-messbar mit $A \subset B$ und $\mathcal{H}^s(B) < \infty$. Zeige: $\overline{\Theta}^s(A,x) = \overline{\Theta}^s(B,x)$ und $\underline{\Theta}^s(A,x) = \underline{\Theta}^s(B,x)$ für $\mathcal{H}^s$-f.a. $x \in A$.

(b) Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{H}^s(B) < \infty$. Wenn B eine s-reguäre Menge ist, dann gilt dies auch für jede $\mathcal{H}^s$-messbare Teilmenge von B, und entsprechend für s-irreguläre Mengen.

(c) Beweise Korollar 6.2 aus der Vorlesung.

5.* Sei $C \subset [0,1]$ die Kantormenge. Zeige, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ gilt.