Universität Ulm

Besprechung: Montag, 30.11.15

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 7

1. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine rektifizierbare injektive Kurve. Zeige: $\operatorname{rg}\gamma$ ist 1-regulär.

2.* Sei $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit $d \le m$ linear. Zeige, dass dann $L = O \circ S$ geschrieben werden kann, wobei $S\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ positive semi-definit symmetrisch und $O\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear und isometrisch ist.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz mit $d \le m$, und $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar (also Lebesgue bzw. $\mathcal{H}^d$-messbar in $\mathbb{R}^d$).

(a) Zeige, dass $f(A)$ stets $\mathcal{H}^d$-messbar ist.

(b) Zeige, $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(\{y\}))$ ist $\mathcal{H}^d$-messbar in $\mathbb{R}^m$ (d.h. Urbilder von Mengen in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ sind $\mathcal{H}^d$-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^m$).

4. In dieser Aufgabe darf Theorem 7.6 (die “area formula”) als vollständig bewiesen vorausgesetzt werden.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz mit $d \le m$, und $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar. Zeige, dass für $\mathcal{H}^d$-f.a. $y \in \mathbb{R}^m$ die Mengen $A \cap f^{-1}(\{y\})$ höchstens abzählbar sind.

(b) Zeige, dass für $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear und invertierbar und $x, y \in \mathbb{R}^d$ die Formel

$$\det(L + xy^\intercal) = (1 + y^\intercal L^{-1} x) \det L$$

gilt. Folgere, dass für $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lipschitz und ein offenes $U \subset \mathbb{R}^d$ folgende Formel gilt:

$$\mathcal{H}^d(\operatorname{gr} g|_U) = \int_U \sqrt{1 + |Dg(x)|_2^2}\, \mathrm{d}x$$

Hier ist $\operatorname{gr} g|_U = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in U\}$ der Graph von g über U.