|3| (a) „⇒" Sei S in Lip.-Graph von f enthalten,
also $S \subset \{x + f(x) : x \in V\}$ mit $f : V \to V^{\perp}$ M-Lip.

Sei $x_0 \in V$

$$\Rightarrow S \subset x_0 + f(x_0) + \{x + f(x) - x_0 - f(x_0) : x \in V\}$$

$$\subset x_0 + f(x_0) + \{z : |(I - P_V)z| \le M|P_V z|\}$$

„⇐" $z_1, z_2 \in S \Rightarrow \cancel{P_{V^\perp}} |(I - P_V)(z_1 - z_2)| \le M|P_V(z_1 - z_2)|$

Also, falls $P_V z_1 = P_V z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$

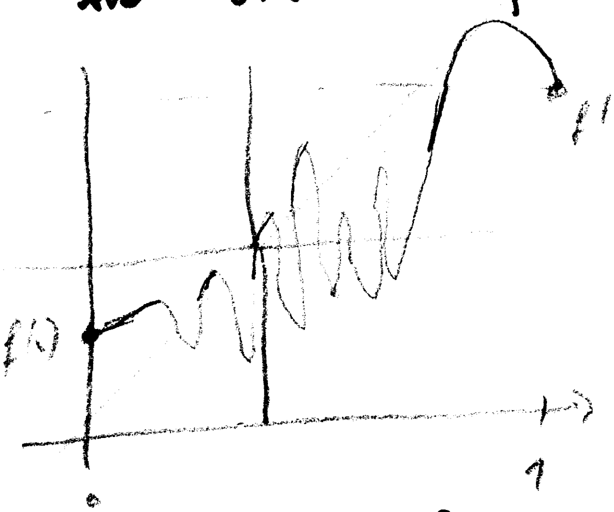
Insbesondere: $\forall x \in P_V S \ \exists!\, y \in V^{\perp} : z = x + y \in S$

Definiere $f(x) := y$

Dann gilt $|f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2|$, und damit ist f Lipschitz und S ist in ein Lip.-Graph enthalten.

(b) Falls f konstant ist, dann trivial.

Also o.B.d.A. $f(0) < f(1)$.



$\forall y \in [f(0), f(1)]$ sei $t(y) := \inf\{t : f(t) = y\}$

Sei $S := \{(t(y), y) : y \in [f(0), f(1)]\}$

Beachte $\mathcal{H}^1(S) \ge f(1) - f(0) > 0$

Zudem: Sei $(t(y), y) \in S$.

Dann gilt

$$\{(t(y) - \alpha, y + \beta) : \alpha, \beta \ge 0\} \cap S = \{(t(y), y)\}$$

und $\{(t(y) + \alpha, y - \beta) : \alpha, \beta \ge 0\} \cap S = \{(t(y), y)\}$

Wähle $V = \mathrm{span}\{(1,1)\}$ und $M = 1$. Nun ist die Bed. aus (a) erfüllt und S ist damit in ein Lip. Graph enthalten, und insbesondere rekt. Da $\mathcal{H}^1(\mathrm{gr}\, f \cap S) > 0$ folgt, dass $\mathrm{gr}\, f$ nicht total 1-unrekt. ist.