Universität Ulm

Besprechung: Montag, 14.12.15

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 9

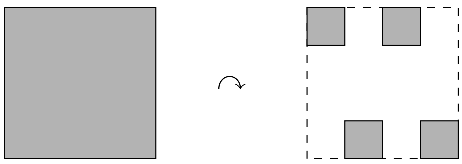
1. Wir verwenden in dieser wichtigen Aufgabe ganz wesentlich Theorem 8.3, Theorem 6.1 und den Lebesgue'schen Dichtesatz aus der Vorlesung. Unser Ziel ist zu zeigen, dass rektifizierbare Mengen k-regulär sind.

(a) Sei $V \in \mathcal{G}(d,k)$ und $f\colon V \to V^\perp$ eine ε-Lipschitz Funktion für ein kleines $\varepsilon > 0$. Zeige, dass
$$\underline{\Theta}^k(\operatorname{gr} f, x_0 + f(x_0)) \geq (1-\varepsilon)^k$$
für alle $x_0 \in V$.

(b) Wir sind im Setting der vorigen Teilaufgabe. Zudem sei eine $\mathcal{H}^k$-messbaren Menge $C \subset V$ gegeben. Zeige, dass
$$\underline{\Theta}^k(\operatorname{gr} f|_C, x_0 + f(x_0)) \geq (1-\varepsilon)^k$$
für alle $x_0 \in C$ mit $\Theta^k(C, x_0) = 1$.

(c) Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine $\mathcal{H}^k$-messbare Menge mit $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Zeige, wenn A zudem k-rektifizierbar ist, dann ist A auch k-regulär.

2. Sei $C_0 := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Um aus C_0 die Menge C_1 zu erhalten, werden alle Quadrate der Seitenlänge s nach folgender Vorschrift durch jeweils 4 abgeschlossene Quadrate mit Seitenlänge $\frac{s}{4}$ ersetzt:



Ebenso ersetze man die Quadrate in C_1 um wiederum C_2 zu erhalten. Induktiv definieren wir so C_k für alle $k \in \mathbb{N}$ und setzen $C := \bigcap_k C_k$.

(a) Zeige, dass C kompakt ist und $P_1 C = [0,1]$ gilt. Hier ist P_1 die orthogonale Projektion auf die erste Komponente.

(b) Zeige, dass $\mathcal{H}^1(C) < \infty$ und folgere, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = 1$.

(c) Zeige, dass $d_{\mathcal{H}}(C_k, C) \to 0$ für $k \to \infty$. Hier ist $d_{\mathcal{H}}$ die Hausdorff-Metrik.

(d) Zeige, dass $\underline{\Theta}^1(C,x) < 1$ für alle $x \in C$ gilt.

(e) Folgere mit Hilfe der ersten Aufgabe, dass C total 1-unrektifizierbar ist.