|2| (a) Es gilt $DF(x) = \begin{pmatrix} I_k \\ Df(x) \end{pmatrix}$ und damit

$$V := \operatorname{rg} DF(x) \in G(d,k) \qquad (x \in C).$$

Dann $V \in C(x, \mathbb{R}^k, \varepsilon)$, also $\|P_V - P_1\| \le \varepsilon$

Ferner: $|P_V(F(x+h) - F(x))| \ge |P_1 \begin{pmatrix} h \\ f(x+h) - f(x) \end{pmatrix}| - |(P_V - P_1)(F(x+h) - F(x))|$

$$\ge |h| - \varepsilon \underbrace{\operatorname{Lip}(F)}_{\le 1+\varepsilon} |h| \ge \frac{1}{2}|h|$$

ε klein genug

Da $F(x+h) - F(x) = DF(x)h + o(h)$

erhalten wir $|P_{V\perp}(F(x+h) - F(x))| \le \underbrace{|P_{V\perp} \frac{o(h)}{|h|}|}_{< \frac{\delta}{2} \text{ für } |h| \text{ klein}} \cdot |h|$

$$\le \delta \, |P_V(F(x+h) - F(x))| .$$

$\Rightarrow$ für $r > 0$ klein gilt $\operatorname{gr} f|_C \cap B(F(x), r) \subset C(F(x), V, \delta)$,

$\delta > 0$ bel. klein fixiert

$\Rightarrow V \in \operatorname{apTan}^k(\operatorname{gr} f|_C, F(x))$.

(wir wissen bereits aus Blatt 9 Aufgabe |1| (b)

dass $0 < \Theta^k(\operatorname{gr} f|_C, F(x)) \le \overline{\Theta}^k(\operatorname{gr} f|_C, F(x))$)

(b)

Sei $\alpha > 0$. Wähle $h \in (P(V \cap W))^{\perp}$ in $\operatorname{rg} P$, $|h| = 1$. (Möglich, da $\dim(V \cap W) \le k-1$.)

1. Beh.: Für $\delta \to 0+$ gilt

$$\sup_{z \in [W]_\delta \cap [V]_\delta \cap B(0,1)} |(Pz \mid h)| \longrightarrow 0 .$$

Ann: Falsch, also $\delta_k \to 0+$, aber

$$\sup |(Pz \mid h)| \ge 2\alpha \quad \forall k$$

d.h. $\exists\, z_k \in [W]_{\delta_k} \cap [V]_{\delta_k} \cap \overline{B(0,1)} : |(Pz_k \mid h)| \ge \alpha \ \forall k$.

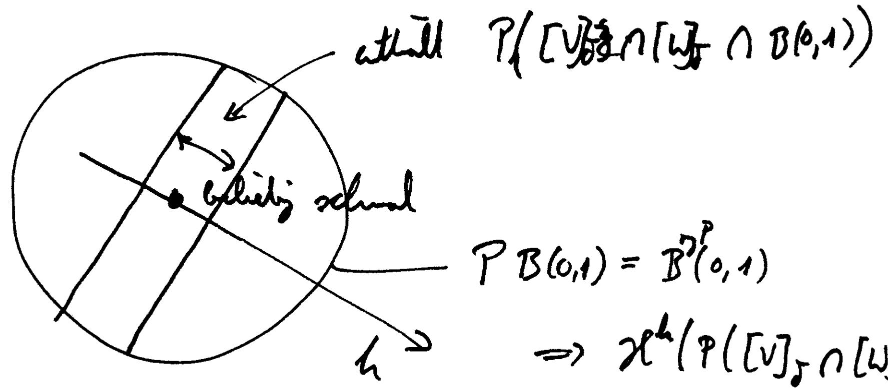
Insbesondere ex. $x_k \in V : |x_k - z_k| \le \delta_k$

und $y_k \in W : |y_k - z_k| \le \delta_k$

Nach TF dürfen wir annehmen, dass $\begin{cases} z_k \to z \\ x_k \to z \\ y_k \to z \end{cases}$

$\Rightarrow z \in V \cap W \Rightarrow 0 < \alpha \le |(Pz \mid h)| = 0$ ↯

In $\mathrm{rg}\, P$ ergibt sich also folgendes Bild:



$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(P([V]_\delta \cap [W]_\delta \cap B(0,1))) \xrightarrow[\delta \to 0+]{} 0 .$$

(c) Seien $V, W \in \mathrm{appTan}^k(\mathrm{gr} f|_C, F(x))$

o.B.d.A. $x = 0$, $F(x) = 0$.

Ann.: $V \neq W$

Es gilt mit $M_r := \mathrm{gr} f|_C \cap B(F(x), r)$

$$M_r = \overbrace{M_r \cap \left(C(x,V,\delta) \cap C(x,W,\delta)\right)}^{=: T_1}$$
$$\dot\cup \left(M_r \setminus C(x,V,\delta) \cup M_r \setminus C(x,W,\delta)\right)$$

und $M_r \cap \left(C(x,V,\delta) \cap C(x,W,\delta)\right)$
$$\subset [V]_{\delta r} \cap [W]_{\delta r} \cap B^d(0,r)$$

Wegen (b) können wir $\delta > 0$ so klein wählen, dass — weil $\mathrm{gr} f|_{C \cap B(x,(1-\varepsilon) r)} \subset B(F(x), r)$
$$\mathcal{H}^k(P_1\, [V]_{\delta r} \cap [W]_{\delta r} \cap B(0,r)) < \frac{1}{4} \alpha(k) (1-\varepsilon)^k r^k$$

Für $r > 0$ klein gilt
$$\mathcal{H}^k(M_r \setminus C(x,V,\delta)) \leq 0.001\, \alpha(k) r^k$$
$$\mathcal{H}^k(M_r \setminus C(x,W,\delta)) \leq 0.001\, \alpha(k) r^k$$
$$0.999\, \alpha(k) r^k \leq \mathcal{H}^k(M_r) \leq 1.001\, \alpha(k) r^k$$

und
$$\mathcal{H}^k(C \cap B(x, (1-\varepsilon) r)) \geq 0.999\, \alpha(k) (1-\varepsilon)^k r^k$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(\overbrace{C \cap B(x, (1-\varepsilon) r) \setminus P_1 (M_r \cap C(x,V,\delta) \cap C(x,W,\delta))}^{=: T_2})$$
$$\geq \left(0.999 - \frac{1}{4}\right) \alpha(k) (1-\varepsilon)^k r^k$$

$M_r \supset T_1 \,\dot\cup\, f(T_2)$
$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(M_r) \geq 0.997\, \alpha(k) r^k + \left(0.999 - \frac{1}{4}\right) \alpha(k) (1-\varepsilon)^k r^k$$
$$> 1.001\, \alpha(k) r^k \quad ↯$$

Also $V = W \underset{(a)}{=} \mathrm{rg}\, DF(x)$.