Universität Ulm

Besprechung: Montag, 21.12.15

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 10

1. Zeige, dass es für $d \geq 2$ an jeder Stelle höchstens eine approximative 1-Tangentialebene aus $\mathcal{G}(d,1)$ an $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt. Gib ein Beispiel von $A \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}^2$-messbar, $\mathcal{H}^2(A) < \infty$ und $x \in A$ derart, dass $\operatorname{apTan}^2(A,x)$ mehr als ein Element enthält.

2. Wir verstehen $\mathbb{R}^d$ zerlegt als $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{d-k}$ und P_1 sei die orthogonale Projektion auf die erste Komponente. Wenn $M \subset \mathbb{R}^d$ und $\delta > 0$, dann setzen wir $[M]_\delta := M + \overline{B}(0,\delta)$. Zudem sei eine ε-Lipschitz Funktion $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{d-k} \subset \mathbb{R}^d$ und $C \subset \mathbb{R}^k$ gegeben, so dass für alle $x \in C$ die Ableitung $Df(x)$ existiert und $\Theta(C,x) = 1$ gilt. Hier darf $\varepsilon > 0$ als ausreichend klein vorausgesetzt werden. Wir schreiben $F(x) = (x, f(x))$.

(a) Zeige, dass $V \in \operatorname{apTan}^k(\operatorname{gr} f|_C, F(x))$ wenn $V = \operatorname{rg} DF(x)$ und $x \in C$.

(b) Seien $V, W \in \mathcal{G}(d,k)$ mit $V \neq W$. Zeige, wenn P eine orthogonale Projektion auf einen Unterraum in $\mathcal{G}(d,k)$ ist, dann gilt $\mathcal{H}^k(P([V]_\delta \cap [W]_\delta \cap B(0,1))) \to 0$ für $\delta \to 0+$.

(c)* Zeige, dass $\operatorname{apTan}^k(\operatorname{gr} f|_C, F(x)) = \{\operatorname{rg} DF(x)\}$ wenn $x \in C$ und $\Theta^k(\operatorname{gr} f|_C, F(x)) = 1$. Betrachte hierzu o.B.d.A. $x = 0$ und $F(x) = 0$, und verwende den vorigen Aufgabenteil und die Beobachtung $C(0,V,\delta) \cap B(0,r) \subset [V]_{\delta r}$.

Aus obigem lässt sich nun leicht folgern, dass eine k-rektifizierbare Menge, wie in Theorem 8.5 postuliert, $\mathcal{H}^k$-f.ü. eine eindeutige approximative k-Tangentialebene besitzt.

3. Wir akzeptieren die Tatsache, dass jede kompakte topologische Gruppe G ein eindeutiges translationsinvariantes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ besitzt, das sogenannte Haar-Maß; damit meinen wir, dass für alle $A \subset G$ Borel und $h \in G$ die Invarianz $\mu(A) = \mu(hA) = \mu(Ah)$ gilt.

(a) Seien μ und ν zwei Borel-Maße auf einem separablen metrischen Raum (M,d). Wir nehmen, an dass $\mu(B(x,r)) = \mu(B(y,r)) \in (0,\infty)$ und $\nu(B(x,r)) = \nu(B(y,r)) \in (0,\infty)$ für alle $r > 0$ und $x, y \in M$. Zeige, dass dann ein $c > 0$ existiert mit $\mu = c\nu$.

Hinweis: Sei $U \subset M$ offen, beschränkt und nicht leer. Definiere $h(r) := \nu(B(z,r))$ (für ein beliebiges $z \in M$) und beachte dass

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\nu(U \cap B(x,r))}{h(r)} = 1$$

für alle $x \in U$. Verwende dies mit Fatou und Fubini, um $\mu(U)$ durch ν auszudrücken.

Sei $\sigma := (\mathcal{H}^{d-1}(\partial\mathbb{B}^d))^{-1}\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\mathbb{B}^d$. (Aus der PDE Vorlesung könnte diesbezüglich die Identität $\sigma(A) = \alpha(d)^{-1}\lambda_d(\{tx : x \in A \text{ und } 0 \leq t \leq 1\})$ bekannt sein.) Man kann nun leicht zeigen, dass das Haar-Maß μ auf $\mathcal{O}(d)$ (den orthogonalen linearen Abbildungen in $\mathbb{R}^d$ mit der Operatornorm) durch $\mu(\{g \in \mathcal{O}(d) : g(x) \in A\}) = \sigma(A)$ für alle $x \in \partial\mathbb{B}^d$ und $A \subset \partial\mathbb{B}^d$ Borel bestimmt ist.

(b)* Für ein $V \in \mathcal{G}(d,k)$ definiere $\gamma_{d,k}(\mathcal{A}) = \mu(\{g \in \mathcal{O}(d) : gV \in \mathcal{A}\})$ für $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}(d,k)$ Borel. Zeige, dass $\gamma_{d,k}$ das eindeutige unter orthogonalen Abbildungen invariante Borel-Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{G}(d,k)$ definiert.