Universität Ulm

Besprechung: Montag, 11.01.16

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

# Übungen Geometrische Analysis: Blatt 11

**1.** (a) Gib ein Beispiel von einer Lebesgue Nullmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit $A + A = \mathbb{R}$.

(b) Gib ein Beispiel einer abzählbaren abgeschlossenen Menge $A \subset B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{M}(A) = \infty$. Insbesondere gilt dann natürlich $\mathcal{H}^1(A) = 0$.

*Hinweis:* Wähle endliche Mengen $A_n \subset B(0, \frac{1}{n})$ mit $B(0, \frac{1}{n}) \subset A_n + B(0, r_n)$ und $r_n > 0$ klein.

**2.** (a) Vervollständige den Approximationsschritt im Beweis der Brunn–Minkowski Ungleichung.

(b) Bleibt die Brunn–Minkowski Ungleichung für alle nichtleeren Mengen richtig, wenn man das Lebesgue-Maß durch das äußere Lebesgue-Maß ersetzt?

**3.** Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein eigentliches konvexes Polyeder, also eine abgeschlossene konvexe Hülle endlich vieler Punkte in $\mathbb{R}^d$ mit nichttrivialem Inneren. Dann ist $\partial P$ in endlich vielen Hyperebenen in $\mathbb{R}^d$ enthalten und $\mathcal{H}^{d-1}(\partial P)$ stimmt mit dem elementargeometrischen Oberflächeninhalt überein. Zeige, dass $\mathcal{M}(\partial P) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial P)$.

**4.*** Zeige, dass eine $\lambda_2$-Nullmenge niemals eine Lösung des Kakeya-Nadelproblems sein kann.

Frohe Weihnachten und eine schöne vorlesungsfreie Zeit!