# Universität Ulm

Besprechung: Montag, 18.01.16

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

## Übungen Geometrische Analysis: Blatt 12

**1.** Zeige folgende Version von Fubinis Theorem. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $k \in \{0, \ldots, d\}$ und $V \in \mathcal{G}(d,k)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_V \int_{V^\perp} f(x_1 + x_2)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x_1)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-k}(x_2).$$

**2.** Sei $d \geq 2$, $f \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$ mit $t \in \mathbb{R}$ derart, dass $\Omega \neq \emptyset$ und $f$ auf $S := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}$ keine kritischen Punkte hat.

(a) Zeige, dass $\partial\Omega = S$ gilt und $S$ kompakt und glatt ist.

Hier bedeutet glatt, dass für jedes $z \in S$ offene Mengen $U, W \subset \mathbb{R}^d$, $V \in \mathcal{G}(d, d-1)$, $g \colon V \cap U \to V^\perp$ mit $z \in W$ existieren, so dass $S \cap W$ der Graph von $g$ ist, wobei $g$ glatt sei. Letzteres heißt natürlich formal, dass für ein orthogonales $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $T(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = V$ und $w \in V^\perp$ mit $|w| = 1$ die Abbildung $x \mapsto g(T(x,0)) \cdot w$ auf $\{x \in \mathbb{R}^{d-1} : (x,0) \in T^{-1}(V \cap U)\}$ in $C^\infty$ sei.

(b) Zeige, dass $\gamma > 0$ und $r_0 > 0$ derart existieren, dass

$$\mathcal{H}^{d-1}(S \cap B(z,r)) \geq \gamma r^{d-1}$$

für alle $z \in S$ und $0 < r < r_0$.

Hinweis: Verwende lokal um jedes $z \in S$ die Area-Formel für $G(x) = (x, g(x))$, schätze $JDG(x)$ nach unten durch 1 ab und verwende dass $g$ Lipschitz ist. Die Behauptung folgt dann mit der Kompaktheit von $S$.

Das Resultat aus dem zweiten Aufgabenteil impliziert mit Hilfe eines Theorems in der nächsten Vorlesung, dass $\mathcal{M}(S) = \mathcal{H}^{d-1}(S)$.

**3.*** Folgere aus unserer Sobolev-Ungleichung die folgende Version für $1 \leq p < d$. Es gibt ein $C = C(p,d)$ so, dass

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla f\|_{L^p}$$

für alle $f \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$, wobei $p^* = \frac{dp}{d-p}$.