Universität Ulm

Besprechung: Montag, 25.01.16

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 13

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und μ_1, μ_2 seinen zwei Radonmaße auf Ω (analog zu $\mathbb{R}^d$ definiert). Zudem seien $\sigma_j \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ für $j \in \{1,2\}$ jeweils μ_j-messbar und $|\sigma_j(x)| = 1$ für μ_j-f.a. $x \in \Omega$ derart, dass

$$\int_\Omega \varphi \cdot \sigma_1 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_\Omega \varphi \cdot \sigma_2 \,\mathrm{d}\mu_2$$

für alle $\varphi \in C_\mathrm{c}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ gilt. Zeige, dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ und $\sigma_1 = \sigma_2$ μ_1-f.ü.

Folgere, dass μ und σ im Riesz–Radon'schen Darstellungssatz eindeutig sind.

2. Sei $I = (0,1)$ und μ ein *endliches* Radonmaß auf I, $\sigma \colon I \to \{-1, 1\}$ sei μ-messbar und $w(t) = \int_{(0,t)} \sigma(s) \,\mathrm{d}\mu(s)$ für $t \in I$. Zeige, dass $w \in \mathrm{BV}(I)$ und bestimme Dw.

3. (a) Sei $f \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Zeige, dass $V(f, \Omega) = \|Df\|(\Omega)$.

(b) Zeige, dass $V(\cdot, \Omega)$ unterhalbstetig ist in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, d.h. wenn $f_k \to f$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, dann gilt $V(f, \Omega) \le \liminf_{k\to\infty} V(f_k, \Omega)$.

Hinweis: Das punktweise Supremum stetiger Funktionen ist unterhalbstetig.

(c) Sei (q_k) eine Abzählung von $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Zeige, dass $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(q_k, 2^{-k}) \subset \mathbb{R}^2$ endlichen Perimeter in $\mathbb{R}^2$ hat, obwohl $|\partial A| = \infty$.

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ zusammenhängend und $f \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\|Df\| = 0$. Zeige, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = c$ f.ü. auf Ω.

Hinweis: Faltung und klassische Aussage.

4.* Zeige, dass $\mathrm{BV}(\Omega)$ mit $\|f\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|Df\|(\Omega)$ zu einem Banachraum wird.

Ist $C^1(\Omega) \cap \mathrm{BV}(\Omega)$ dicht in $(\mathrm{BV}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{BV}(\Omega)})$?