Universität Ulm

Besprechung: Montag, 01.02.16

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 14

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und für $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\} \cap B(0,n)$ und $\Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset$ definiere $U_n := \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Das $n-2$ ist nur zur Vereinfachung der Aufgabenstellung, aber der fehlende Abschluss war natürlich ein Schreibfehler in der Vorlesung!)

Zeige, dass es (ζ_n) in $C_c^\infty(U_n)$ gibt mit $0 \le \zeta_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \zeta_n(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$.

Hinweis: Für n fest, wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(\overline{\Omega_n} \setminus \Omega_{n-1}) + \overline{B}(0, 3\frac{1}{k}) \subset U_n$. Definiere $\tilde{\zeta}_n$ als Faltung eines geeigneten Indikators mit dem Standard-Mollifier ρ_k.

2. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt mit $P(A, \mathbb{R}^d) < \infty$. Zeige, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \|D(\mathbb{1}_A * \rho_n)\|(\mathbb{R}^d) = P(A, \mathbb{R}^d)$$

gilt, wobei (ρ_n) der Standard-Mollifier sei.

Hinweis: Zeige, dass $\nabla(\mathbb{1}_A * \rho_n) = (D\mathbb{1}_A) * \rho_n$ gilt. Faltung und Fubini!

3. (a) Sei $f \in L^1(\Omega)$. Zeige, dass die Abbildung $t \mapsto V([f > t], \Omega)$ als Abbildung $\mathbb{R} \to [0, \infty]$ messbar ist.

(b) Zeige folgendes mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Co-Area Formel: Für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f| = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{d-1}(S_t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $S_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}$.

4.* Zeige: Wenn $f \in C^\infty(\Omega)$ und $\phi \in C_c^1(\Omega)$, dann gilt

$$-\int_\Omega f^+(x)\partial_j\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{1}_{[f>0]}(x)\partial_j f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgere, für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\partial_j f = 0$ f.ü. auf $[f = t]$.

Hinweis: Sei $\eta(s) = s \vee 0$. Für $\varepsilon > 0$ betrachte $\eta_\varepsilon(s) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ für $s \ge 0$ und $\eta_\varepsilon(s) = 0$ für $s < 0$. Die Aussage gilt allgemeiner im Kontext von Sobolevfunktionen (als Lemma von Stampacchia).