Übungen Geometrische Analysis: Blatt 15

1. (a) Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Definiere für alle $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\tilde{V}(f, A) := \inf\{V(f, U) : A \subset U,\, U \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\}.$$

Zeige, dass $\tilde{V}(f, \cdot)$ ein Borel reguläres äußeres Maß ist.

Hinweis: Zeige erst endliche Subadditivität. Verwende dann, dass

$$V(f, U) = \sup_{U' \Subset U} V(f, U').$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $A, B \subset \mathbb{R}^d$ messbar. Zeige, dass $P(A, \Omega) = P(\mathbb{R}^d \setminus A, \Omega)$ und

$$P(A \cap B, \Omega) + P(A \cup B, \Omega) \le P(A, \Omega) + P(B, \Omega).$$

Hinweis: Geeignete Approximation mit glatten Funktionen derart, dass

$$\int_\Omega |\nabla(f_n g_n)| + \int_\Omega |\nabla(f_n + g_n - f_n g_n)| \le \int_\Omega |\nabla f_n| + \int_\Omega |\nabla g_n|.$$

2. In dieser Aufgabe beweisen wir die relative isoperimetrische Ungleichung.

(a) Zeige, dass für $B := B(0, 1)$ ein $C > 0$ existiert mit

$$\Big(\int_B |f(x) - f_B|^{d/(d-1)}\,\mathrm{d}x\Big)^{(d-1)/d} \le C\|Df\|(B)$$

für alle $f \in \mathrm{BV}(B)$. Wie hängt C von $r > 0$ ab, wenn man B durch $B(z, r)$ ersetzt?

Hinweis: Verwende Theorem 11.10 und Proposition 11.7 (a).

(b) Zeige analog zum Beweis von Proposition 11.7 (b) mit obiger Ungleichung, dass es ein $C > 0$ gibt mit

$$\min\{|A \cap B(z, r)|, |B(z, r) \setminus A|\}^{(d-1)/d} \le CP(A, B(z, r)).$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ von lokal endlichem Perimeter in $\mathbb{R}^d$.

3. Beweise mit Hilfe des Kompaktheitssatzes (Theorem 11.13) das Korollar zur Existenz von Minimalflächen. Zeige also: Gegeben $\Omega, F \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $P(F, \mathbb{R}^d) < \infty$, dann existiert ein $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $A = F$ auf Ω^c mit minimalem Perimeter in $\mathbb{R}^d$ (unter allen messbaren Mengen mit dieser Eigenschaft).

Hinweis: Betrachte eine minimierende Folge (A_n) für den Perimeter in $B(0, R)$, wobei $R > 0$ mit $\Omega \Subset B(0, R)$.