141 (c) Wegen 131 (b) sind A_r und A_s $\mathcal{H}^s$-messbar (was in der Def. von s-reg. und s-irregulär vorausgesetzt wurde).

Wegen 141 (a) gilt

$$\Theta(A_r, x) = \Theta(A, x) = 1 \quad \text{für } \mathcal{H}^s\text{-f.a. } x \in A_r$$

$\Rightarrow$ A_r ist s-reg.

Analog folgt, dass A_s s-irregulär ist.

Sei nun eine weitere Darstellung $A = B_r \cup B_s$ mit B_r s-reg, B_s s-irreg. gegeben.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^s$-f.a. $x \in B_r \cap B_s$ sind s-reg. <u>und</u> s-irreg.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^s(B_r \cap B_s) = 0$.

Sei $C := A_r \setminus B_r \subset B_s$

Wegen (b) sind $\mathcal{H}^s$-f.a. Punkte in C s-reg und s-irreg.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^s(C) = 0$.

Analog alle anderen Kombinationen.

$\Rightarrow$ $A_r \equiv B_r$ und $A_s \equiv B_s$ (mod $\mathcal{H}^s$).

|5| $C_0 := [0,1] \leftarrow 2^0$ Int.

$C_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1] \nwarrow 2^1$ Int.

Dann sind die Intervalle aus C_n eine $(\frac{1}{3})^n$-ÜD von C

$s := \log 2/\log 3$

$\vdots$

$\to C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$

$$\mathcal{H}^s_{(\frac{1}{3})^n}(C) \le 2^n \cdot \frac{\alpha(s)}{2^s}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n\cdot s} = \frac{\alpha(s)}{2^s} < \infty$$

$$\left[\ 3^{-\log 2/\log 3} = \exp(\log 3\cdot(-\log 2/\log 3)) = \frac{1}{2}\ \right]$$

$\Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(C) \le s$

Es genügt jetzt zu zeigen: $\mathcal{H}^s(C) > 0$.

Sei (U_j) eine offene Überdeckung von C. Da C kompakt ist, ist die Überdeckung o.B.d.A endl., also $U_1,\dots,U_N$.

Sei j nun fixiert und wähle $\underset{=n(j)}{n}\in\mathbb{N}$: $3^{-(n+1)} \le \operatorname{diam} U_j < 3^{n}$.

Dann schneidet U_j also nur ein Intervall von C_n.

Falls $m \ge n$ gilt, schneidet U_j höchstens 2^{m-n} Intervalle von C_m.

Es gilt: $2^{m-n} = 2^m\cdot 3^{-sn} = 2^m\cdot 3^s\cdot 3^{-s(n+1)}$
$\le 2^m\cdot 3^s\cdot(\operatorname{diam} U_j)^s$

Wähle $m \ge \max\{n(1),\dots,n(N)\}$.

Da $(U_j)_{j=1}^N$ alle 2^m Intervalle von C_m schneidet, folgt

$$2^m \le 2^m\cdot 3^s \sum_{j=1}^N (\operatorname{diam} U_j)^s$$

bzw. $$\sum_{j=1}^N \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} U_j}{2}\right)^s \ge 3^{-s}\alpha(s)\cdot 2^{-s} = 2^{-s-1}\alpha(s)$$

$\Rightarrow \mathcal{H}^s(C) \ge 2^{-s-1}\alpha(s) > 0$ (die Gamma-Funktion hat Pole nur an $z\in -\mathbb{N}_0$) □