

12\*) Falls  $L = O \circ S$ , dann folgt  $L^T L = \underbrace{S^T O^T O S}_{=I} = S^2$ , also  $S = \sqrt{L^T L}$

Beachte:  $L^T L$  ist symm.,  $\mu$  semidef.

Sei  $x_1, \dots, x_d$  ONB von  $\mathbb{R}^d$  zu EW  $\mu_1, \dots, \mu_d$

Falls  $\mu_k > 0$  setzen wir  $z_k := \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} L x_k$

$$\text{Dann gilt } (z_k | z_j) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k \mu_j}} (L^T L x_k | x_j) = \delta_{kj}$$

Wir ergänzen die  $z_k$  ~~zu d orth. Vektoren~~ zu d orth.

Vektoren in  $\mathbb{R}^m$  (also für die EW 0).

$$\text{Definiere } S x_k := \sqrt{\mu_k} x_k$$

$$\text{und } O x_k := z_k$$

$O$  ist nach Def. isometrisch und

$$O S x_k = \sqrt{\mu_k} O x_k = \sqrt{\mu_k} z_k = L x_k,$$

$$\text{damit } O \circ S = L. \quad \square$$