Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 02.11.18,
13:00 Uhr, Briefkasten vor H3
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 2

Wichtige Anmerkungen:

Wegen des Feiertags am Donnerstag, den 01.11. entfällt die Übungsveranstaltung an diesem Tag. Das vorliegende Übungsblatt ist daher ausnahmsweise bis spätestens 13:00 Uhr am Freitag, den 02.11. abzugeben. Die Abgabe erfolgt durch rechtzeitigen Einwurf in das entsprechend beschriftete Fach am Metallbriefkasten direkt vor dem Eingang zu Hörsaal H3. Übungsblatt 2 und das Übungsblatt 3 von nächster Woche werden dann beide bei der Übungsveranstaltung am 08.11. besprochen.

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Seien M und N Mengen, und $g, h\colon M \to N$ zwei Funktionen. Zeige, dass $g = h$ (als Mengen) genau dann gilt, wenn

$$\forall x \in M : g(x) = h(x).$$

Bemerkung: Das zweite „=“ bedeutet Gleichheit von Elementen in N.

2. Seien X, Y und Z Mengen.

(a) Zeige

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

(b) Zeige

$$(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z).$$

3. Sei $M := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Zeige, dass dann eine bijektive Abbildung $f\colon M \to (M\setminus\{\frac{1}{42}\})$ existiert.

4. Sei $I := \{x \in \mathbb{R} : (0 \le x) \wedge (x \le 1)\}$. Welche der Relationen

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(x,y) \in I \times I : x^2 + y^2 = 1\},\\
R_2 &:= \{(x,y) \in I \times I : y - x^3 = 0\},\\
R_3 &:= \{(x,y) \in I \times I : y^3 - xy = 0\},\\
R_4 &:= \{(x,y) \in I \times I : y^2 - 2y + 1 = 0\}
\end{aligned}$$

auf I sind Funktionen von I nach I? Skizziere alle Relationen als Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Was passiert, wenn oben I jeweils durch $\{x \in \mathbb{R} : (-1 \le x) \wedge (x \le 1)\}$ ersetzt wird?

5. Es seien X, Y Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $B_1, B_2 \subset Y$.

(a) Zeige $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) Zeige $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und eventuell auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

6. Seien N und M Mengen. Zeige die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen: (2)

(i) $N \subset M$

(ii) $N \cap M = N$

(iii) $N \cup M = M$

Hinweis: Drei Aussagen A, B, C sind äquivalent, wenn sie paarweise äquivalent sind, also $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge (C \Leftrightarrow A)$ gilt. Es genügt dazu aber beispielsweise zu zeigen, dass $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)$ gilt. Dies kann leicht mit einer Wahrheitstafel als logisch äquivalent nachgewiesen werden und spart in der Regel viel Arbeit. Entsprechend gilt das auch allgemeiner für den Nachweis der Äquivalenz von n Aussagen für ein $n \in \mathbb{N}$.

7. Seien A, B und C nichtleere Mengen. Definiere (3)

$$\mathcal{G} := \{g \colon \{1,2,3\} \to A \cup B \cup C : (g(1) \in A) \wedge (g(2) \in B) \wedge (g(3) \in C)\}.$$

Zeige, dass eine bijektive Abbildung $f \colon ((A \times B) \times C) \to \mathcal{G}$ existiert.

8. Seien X, Y Mengen und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren (2)

$$R := \{(a,b) \in X \times X : f(a) = f(b)\}.$$

Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf X ist. Beschreibe die Äquivalenzklasse von $x \in X$ als ein geeignetes Urbild unter f.

9. Es seien X, Y Mengen, $f \colon X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subset X$ und $B \subset Y$.

(a) Zeige $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Gib ein Beispiel an, bei dem keine Gleichheit vorliegt. (1,5)

(b) Zeige $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Gib ein Beispiel an, bei dem keine Gleichheit vorliegt. (1,5)