Universität Ulm

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Donnerstag, 08.11.18
Gesamtpunktzahl: 10

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 3

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Behauptung: Alle Smarties haben dieselbe Farbe.

Denn: Sei M die Menge aller Smarties. Diese Menge ist endlich. Wir zeigen, dass alle Teilmengen $N \subset M$ nur gleichfarbige Smarties enthalten, durch Induktion über die Anzahl der Elemente von N.
Induktionsanfang: Wenn $N \subset M$ leer oder einelementig ist, so haben alle Elemente in N dieselbe Farbe.
Induktionsschritt von n auf $n+1$: Nach Induktionshypothese dürfen wir annehmen, dass jede n-elementige Teilmenge von M nur gleichfarbige Smarties enthält. Sei $N \subset M$ eine Menge von $n+1$ Smarties. Wähle $a, b \in N$ mit $a \neq b$. Dann enthalten die Mengen $N \setminus \{a\}$ und $N \setminus \{b\}$ nach Induktionshypothese jeweils nur gleichfarbige Smarties. Jedes $c \in N \setminus \{a, b\}$ liegt aber in $(N \setminus \{b\}) \cap (N \setminus \{a\})$ und hat damit dieselbe Farbe wie a und wie b. Also haben a und b dieselbe Farbe. Es folgt, dass alle $c \in N$ dieselbe Farbe haben.
Damit gilt die Aussage nach vollständiger Induktion insbesondere für die Menge $N = M$. QED.

Offenbar ist Obiges absurd. Wo liegt der Fehler?

3. Wir definieren rekursiv die Fakultät von Zahlen in $\mathbb{N}_0$ durch $0! := 1$ und $n! = (n-1)! \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt also zum Beispiel $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Mit Definition 1.33 gilt dann $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeige, dass $n! \geq 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M := \{1, \ldots, n\}$. Definiere

$$\mathcal{S} := \{p \colon M \to M : p \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{S}$ genau $n!$ Elemente hat.

(c) Zeige, dass es genau $n!$ Möglichkeiten gibt, n unterscheidbare Gegenstände in einer Reihe anzuordnen.

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

gilt.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und eventuell auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. (a) Welche reellen Zahlen enthält die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, \frac{1}{n})$? (1)

Hinweis: Hier bezeichnet $(0, \frac{1}{n})$ das Intervall $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \wedge x < \frac{1}{n}\}$ und kein geordnetes Paar.

(b) Zeige: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n = m\}$ unendlich ist. (1)

6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f((x, y)) = (x+1, (1+|x|)y)$. Besitzt f eine Umkehrfunktion? Gib diese gegebenenfalls an. (1)

7. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ definieren wir den Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-(j-1)}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Offenbar gilt damit $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$. Zeige: Es gilt (2)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

und falls $n > k$ auch

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige: (3)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

8. Beweise das Distributivgesetz der natürlichen Zahlen, also dass (2)

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N} : n(m+k) = nm + nk.$$

Dabei dürfen nur die Definition von Addition und Multiplikation und die in der Vorlesung bereits beweisenen Rechenregeln des Assoziativgesetzes der Addition und des Kommutativgesetzes der Addition verwendet werden.