Universität Ulm

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2018/2019

Abgabe: Donnerstag, 20.12.18
Gesamtpunktzahl: 10

Übungen zur Analysis 1: Blatt 9

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x^2$ falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $g(x) = 0$ sonst. Untersuche g auf Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitung an den Stellen wo g differenzierbar ist.

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeige, dass I genau dann kompakt ist, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in I$.

Hinweis: Verfahre so ähnlich wie im Beweis zu Satz 3.16.

3. (a) Finde eine beschränkte stetige Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, welche nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeige, das $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig auf $[0,\infty)$ ist.

Bemerkung: Das gilt auch allgemeiner für die k-te Wurzel mit $k \in \mathbb{N}$.

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Zeige, dass f dann ein Minimum annimmt, d.h. es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = \inf f(\mathbb{R})$.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. (a) Zeige, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - a| < \varepsilon$. (0,5)

Hinweis: Vielleicht ist es hilfreich, dass $\frac{1}{42} + \frac{\sqrt{2}}{1000} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) Sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Zeige, dass dann f konstant ist. (1)

6. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (1,5)

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{|x|} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuche f_k in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$ auf Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitung an den Stellen wo f_k differenzierbar ist.

7. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig derart, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren. Zeige, dass f dann gleichmäßig stetig ist. (3)

8. Zeige oder widerlege (mit einem Gegenbeispiel) jede der folgenden Aussagen.

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) < g(x)$ für alle $x \in I$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) + \varepsilon < g(x)$ für alle $x \in I$. (2)

(b) Sei $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann nimmt f auf $(0, 1]$ ein Maximum an, falls es dort kein Minimum annimmt. (2)