Universität Ulm

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Donnerstag, 17.01.19
Gesamtpunktzahl: 10

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 10

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = (6x^3 + 7x + 4)^4$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = x^{3/5} - x^{-3/5}$ für $x > 0$

(d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ für $x > 0$

2. Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$. Zeige, dass dann ein $\xi \in (a, b)$ existiert mit $f'(\xi) = 0$.

Folgere, dass es keine differenzierbare Funktion $F\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gibt mit $F'(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $F'(x) = -1$ für $x < 0$.

3. Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3+x+1$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion hat. Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle 11.

4. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien Messungen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ einer unbekannten Größe $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der mittlere Fehler ist dann als $E(x) := \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ definiert. Bei welchem Wert von x würde der mittlere Fehler minimal?

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. Es sei $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2+1$. Bestimme unter Verwendung von Satz 4.27 den Wert von $\mathcal{I}(f)$ direkt als Grenzwert von Riemann-Summen (also ohne den Hauptsatz). (1,5)

6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien beide konvex.

(a) Zeige, dass dann auch $M\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ konvex ist. (1)

(b) Ist dann auch das Produkt fg immer konvex? (0,5)

7. Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$. (4)

(a) Bestimme die lokalen und globalen Extrema von f.

(b) Bestimme die maximalen Intervalle, auf denen f monoton wachsend bzw. fallend ist.

(c) Bestimme die maximalen Intervalle, auf denen f konvex bzw. konkav ist.

(d) Bestimme falls möglich $\lim_{x\nearrow 1} f'(x)$ und $\lim_{x\searrow -1} f'(x)$.

(e) Skizziere f und f'.

8. Beweise oder widerlege mit einem Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen.

(a) Für $a\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existiere $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a(n,m)$ in $\mathbb{R}$ (als iterierter Folgengrenzwert). Dann existiert auch $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a(n,m)$ mit gleichem Wert. (1)

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Mal differenzierbar mit $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Dann existiert ein $a \in (-1,1)$ mit $f''(a) = 0$. (1)

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig. (1)