# Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 24.01.19
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2018/2019

# Übungen zur Analysis 1: Blatt 11

## Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

**1.** Berechne folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^3 x^2 + \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (2x+1)\sin(-3x+2)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_5^6 \frac{2-x}{4-x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \exp(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

*Hinweis:* Elementare Eigenschaften der Exponentialfunktion, des Logarithmus und der trigonometrischen Funktionen dürfen hier direkt verwendet werden.

**2.** Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Berechne $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x$.

*Hinweis:* Zeige zunächst für $I_{n,m} := \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x$, dass $I_{n,m} = \dfrac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$.

**3.** Beweise oder widerlege mit einem Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen.

(a) Es sei $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 1$ für alle $x \in [0,5]$. Dann gilt $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(b) Es sei $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \leq 1$ für alle $x \in [0,5]$. Dann gilt $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 1$.

(c) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ stetig. Dann ist jede Stammfunktion von $f$ streng monoton wachsend.

## Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

**4.** Berechne folgende Integrale. Dabei müssen die Rechenschritte selbstverständlich adäquat begründet werden. (2×1)

(a) $\int_0^1 \exp(x + \exp(x))\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 x^2 \exp(x)\,\mathrm{d}x$

*Hinweis:* Die elementaren Eigenschaften der Exponentialfunktion exp dürfen hier direkt verwendet werden (insbesondere $\exp' = \exp$, exp ist strikt positiv und streng monoton wachsend, $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$).

**5.** Sei $I = [a, b]$ kompakt mit $a < b$ und $f \in C(I)$.

(a) Seien $c, d \in I$ mit $c < d$ gegeben. Zeige, dass ein monotones $g \in C^1([c, d])$ existiert mit $g(c) = f(c)$, $g(d) = f(d)$ und $g'(c) = g'(d) = 0$. (1)

(b) Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $g \in C^1([a, b])$ existiert, welches $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt. (1,5)

(c) Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $g \in C^1([a, b])$ existiert mit $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. (0,5)

**6.** Sei $I = [a, b]$ kompakt mit $a < b$ und $f \in C(I)$. Zeige: Dann gilt (2,5)

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\in\mathbb{N})}} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

*Hinweis:* Zeige die Behauptung zunächst für ein $g \in C^1(I)$ anstatt von $f$ und verwende dann die vorige Aufgabe. Bei dieser Aufgabe darf verwendet werden, dass $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, und $|\sin(x)| \le 1$ und $|\cos(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**7.** Beweise oder widerlege mit einem Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen.

(a) Sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann existiert ein $\xi \in [-1, 1]$ mit (1)

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(\xi).$$

(b) Sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \le x$ für alle $x \in [0, 1]$ und $f(0) = 0$. Dann gilt $f(1) \le \frac{1}{2}$. (1,5)