Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 31.01.19
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 12

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad höchstens n, d.h. es existieren $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq n$.

Zeige, dass das Taylorpolynom m-ter Ordnung von p für den Entwicklungspunkt a mit p übereinstimmt.

2. (a) Seien $b, c \in \mathbb{C}$ fest und $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $p(z) = z^2 + bz + c$.

Zeige, dass es $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt mit $p(z) = (z - \lambda)(z - \mu)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für jedes $a \in \mathbb{C}$ eine Zahl $w \in \mathbb{C}$ existiert mit $w^2 = a$.

(b) Gib ein Beispiel einer komplexen Polynomfunktion der Form $p(z) = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, welche keine reelle Nullstelle hat.

3. Zenon von Elea hat im 5. Jahrhundert v. Chr. die Mathematik mit folgendem Paradoxon herausgefordert: Der legendäre Krieger Achilles und eine Schildkröte rennen auf einer langen geraden Strecke um die Wette. Weil Achilles 12 Mal schneller ist als die Schildkröte, beginnt die Schildkröte das Wettrennen mit einem Vorsprung von 100 m. Wenn Achilles die 100 m gerannt ist, ist die Schildkröte aber ihrerseits bereits ein Stück weitergekommen, nämlich $\frac{100}{12}$ m. Nachdem Achilles diese zusätzliche Distanz zurückgelegt hat, ist die Schildkröte wieder bereits ein Stück weiter, nämlich $\frac{100}{144}$ m. Wenn man diesen Prozess so fortsetzt, heißt das aber doch, dass Achilles die Schildkröte nie einholt, oder nicht?

Rette die Mathematik und löse dieses Paradoxon!

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

4. Untersuche jeweils, ob folgende Reihen konvergieren und bestimme im Falle der Konvergenz deren Wert: (3×1)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

5. (a) Bestimme den Real- und Imaginärteil von (1)

$$\frac{(3+i)^2}{-2+i5}.$$

(b) Bestimme alle (komplexen) Häufungspunkte der komplexen Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$. (1)

(c) Berechne $|\frac{4}{5} - i\frac{3}{5}|$ und $|(\frac{4}{5} - i\frac{3}{5})^{2019}|$. (1)

(d) Skizziere folgende Teilmenge von komplexen Zahlen in $\mathbb{R}^2$: (1)

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0 \wedge |z - 1 - i| \geq \sqrt{2} \wedge |z - i| \leq |z - 1|\}.$$

6. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. (1,5)

Bemerkung: Hier darf neben den elementaren Eigenschaften der Exponentialfunktion (insbesondere $\exp' = \exp$) verwendet werden, dass $\lim_{x\to\infty}(p(x)\exp(-x)) = 0$ für jede Polynomfunktion p.

(b) Bestimme für $m \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom m-ter Ordnung von f für den Entwicklungspunkt $a = 0$. (0.5)

Welche Funktion stellt damit die Taylorreihe von f in 0 dar?

(c) Beweise, dass es eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ gibt mit $\varphi \geq 0$, $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$, und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. (1)