Matroïdes infinis

Henning Bruhn

Projet Combinatoire et Optimisation

22/05/2012

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

+Reinhard Diestel, Matthias Kriesell, Rudi Pendavingh & Paul Wollan

Échange des bases

Deux bases...

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\42\end{pmatrix}$$

Échange des bases

Deux bases...

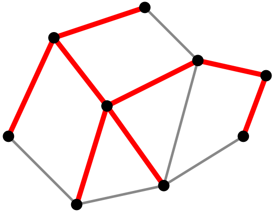
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\42\end{pmatrix}$$

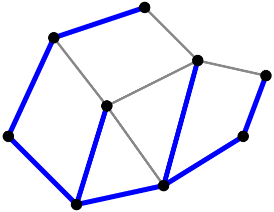
$$\searrow \qquad \swarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Échange des arbres

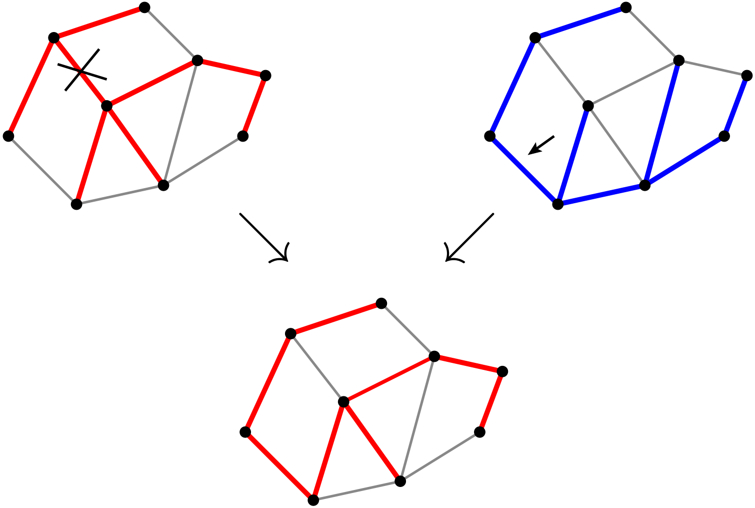
Deux arbres...





Échange des arbres

Deux arbres...



Matroïde

Soient E ensemble fini et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$

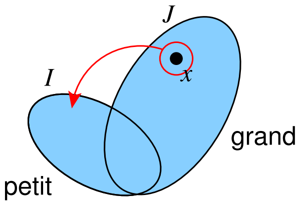
(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) Pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in B_1 \setminus B_2$ il existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $B_1 - x + y \in \mathcal{B}$

Si $\mathcal{B}$ vérifie (B1) & (B2), alors $(E, \mathcal{B})$ est un matroïde
(Hassler Whitney 1935)

$\rightarrow$ $\mathcal{B}$: bases
$\rightarrow$ sous-ensembles des bases : ensembles indépendents

Axiomes d'indépendance



Soit E ensemble fini

(I1) $\emptyset$ indépendent

(I2) Si $I \subseteq E$ indépendent, alors aussi $J \subseteq I$

(I3) Si $I, J \subseteq E$ indédepents et $|I| < |J|$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x$ indépendent

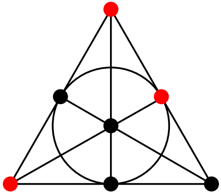
Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ vérifie (I1)–(I3), alors $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde

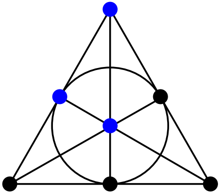
$\rightarrow$ bases : maximalement indépendent

Exemple I : Plan de Fano

E : points du plan de Fano

$\mathcal{B}$: tous 3 points pas sur une ligne

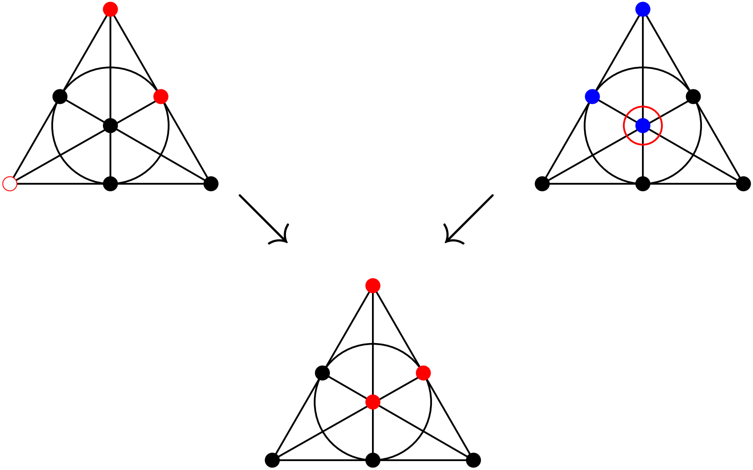




Exemple I : Plan de Fano

E : points du plan de Fano

$\mathcal{B}$: tous 3 points pas sur une ligne



Exemple II : Extension des corps

Soient

- $K \subseteq L$ des corps
- $E \subseteq L$ ensemble fini
- $I \subseteq E$ indépendant si x transcendant sur $K(I - x)$ pour tout $x \in I$

$\rightarrow$ ensembles indépendants forment un matroïde

Exemple III : Algorithme glouton

E : ensemble fini
$\mathcal{R}$: $X \subseteq E$ solutions réalisables
w : $E \rightarrow \mathbb{R}_+$: poids

Problème :
trouver $X \in \mathcal{R}$ de poids max

Si l'algorithme glouton trouve toujours l'optimum
$\rightarrow (E, \mathcal{R})$ matroïde

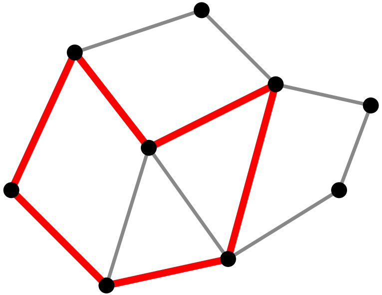
Points clés des matroïdes

- ensembles indépendants
- bases ($\rightarrow$ maximalement indépendant)
- circuits ($\rightarrow$ minimalement dépendant)
- dualité
- cryptomorphisme

Circuits

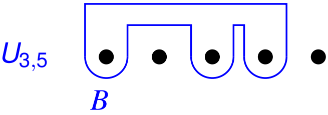
Circuit : ensemble $C \subseteq E$ minimalement dépendent

- tout ensemble dépendent contient un circuit



Matröide dual

$\mathcal{B}$ bases de $M \quad \Leftrightarrow \quad \{E \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$ bases de M^*

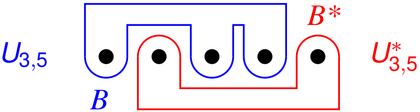


DEF $U_{r,n}$
$E = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{B}$: k-éléments parties

dual $U^*_{r,n}$
$E = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{B}^*$: $(n-k)$-éléments parties

Matroïde dual

$$\mathcal{B} \text{ bases de } M \quad \Leftrightarrow \quad \{E \setminus B : B \in \mathcal{B}\} \text{ bases de } M^*$$



DEF $U_{r,n}$
$E = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{B}$: k-éléments parties

dual $U^*_{r,n}$
$E = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{B}^*$: $(n-k)$-éléments parties

Cryptomorphisme

Double-Face

Axiomes équivalents des matroïdes :

- Axiomes des bases
- Axiomes d'indépendance
- Axiomes des circuits
- Axiomes de clôture
- Axiomes de rang

Problème de Rado

Rado 1966 :

Comment définir un matroïde sur un ensemble E infini ?

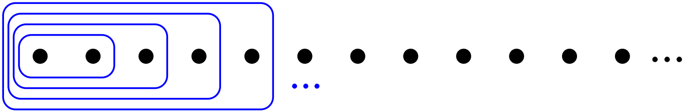
Approche I : on ne change rien

$\mathcal{I}$: ensembles indépendents

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(I3) Si $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J|$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$



$E = \mathbb{Z}$

$\mathcal{I}$: les parties finies de $\mathbb{Z}$

- $(E, \mathcal{I})$ vérifie (I1)–(I3)
- pas de bases !

Approche II : matroïdes finitaires

$\mathcal{I}$: ensembles indépendants

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

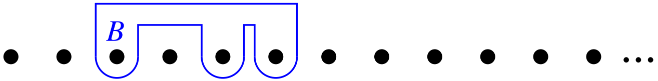
(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(I3) Si $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J|$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$

(I4) Si pour tout $J \subseteq I$ fini on a $J \in \mathcal{I}$, alors $I \in \mathcal{I}$

Approche II : matroïdes finitaires

(I4) Si pour tout $J \subseteq I$ fini on a $J \in \mathcal{I}$, alors $I \in \mathcal{I}$



$E = \mathbb{Z}$

primal $U_{3,\infty}$
$\mathcal{I}$: ensembles de cardinalité ≤ 3
$\mathcal{B}$: ensembles de cardinalité 3

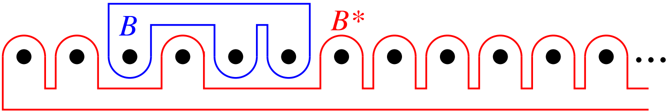
- $(E, \mathcal{I})$ vérifie (I1)–(I4)

dual $U^*_{3,\infty}$
$\mathcal{B}^* = \{X \subseteq \mathbb{Z} : |\mathbb{Z} \setminus X| = 3\}$
$\Rightarrow$ X fini $\rightarrow$ indépendent en M^*
mais $E = \mathbb{Z}$ dépendent

- le dual ne vérifie pas (I4) !

Approche II : matroïdes finitaires

(I4) Si pour tout $J \subseteq I$ fini on a $J \in \mathcal{I}$, alors $I \in \mathcal{I}$



$E = \mathbb{Z}$

primal $U_{3,\infty}$

$\mathcal{I}$: ensembles de cardinalité ≤ 3

$\mathcal{B}$: ensembles de cardinalité 3

dual $U^*_{3,\infty}$

$\mathcal{B}^* = \{X \subseteq \mathbb{Z} : |\mathbb{Z} \setminus X| = 3\}$

$\Rightarrow$ X fini $\rightarrow$ indépendent en M^*

mais $E = \mathbb{Z}$ dépendent

- $(E, \mathcal{I})$ vérifie (I1)–(I4)
- le dual ne vérifie pas (I4) !

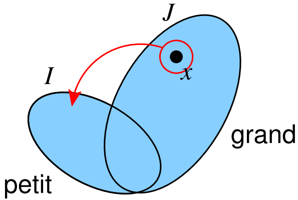
Aproche XX

- matroïdes de Klee
- B-matroïdes et C-matroïdes de Higgs
- dualité de Las Vergnas
- Bean, Oxley,...

"The theory of infinite matroids is much more complicated than that of finite matroids and forms a subject of its own. One of the difficulties is that there are many reasonable and useful definitions, none of which captures all the important aspects of finite matroid theory. For instance, it seems to be hard to have bases, circuits, and duality together in one notion of infinite matroids."

Wikipedia, 15 mars 2010

Matroïdes infinis



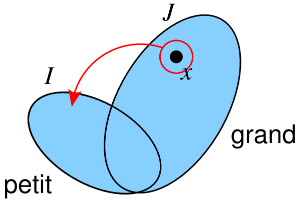
E : ensemble
$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(I3) Si $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J|$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$

Matroïdes infinis



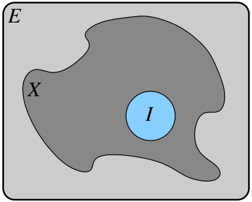
E : ensemble
$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$
$\mathcal{I}^{\max}$: $\subseteq$-max membres de $\mathcal{I}$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(I3′) Si $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^{\max}$ et $J \in \mathcal{I}^{\max}$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$

Matroïdes infinis



E : ensemble
$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$
$\mathcal{I}^{\max}$: $\subseteq$-max membres de $\mathcal{I}$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

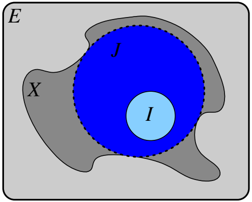
(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(I3′) Si $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^{\max}$ et $J \in \mathcal{I}^{\max}$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max

Si $\mathcal{I}$ vérifie (I1)–(IM), alors $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde

Matroïdes infinis



E : ensemble
$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$
$\mathcal{I}^{\max}$: $\subseteq$-max membres de $\mathcal{I}$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(I3′) Si $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^{\max}$ et $J \in \mathcal{I}^{\max}$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max

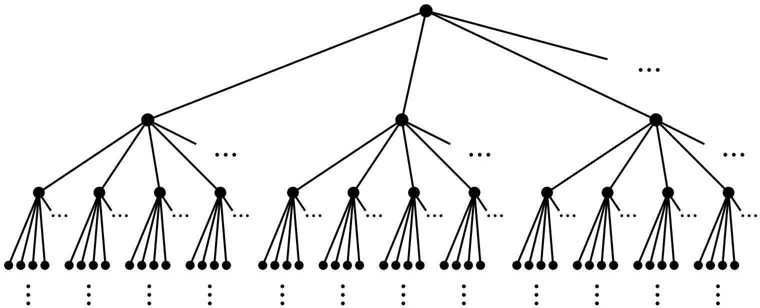
Si $\mathcal{I}$ vérifie (I1)–(IM), alors $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde

Quelques matroïdes

- Matroïdes finis
- Matroïdes finitaires
- Les duals des matroïdes finitaires
- ...

Un exemple

E : arêtes de l'arbre dont tous les sommets ont degré ω
$\mathcal{I}$: tout $I \subseteq E$ ne contenant aucun double rayon

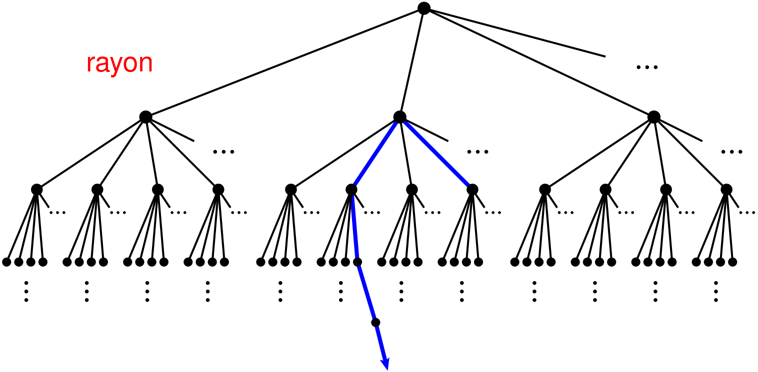


- $(E, \mathcal{I})$ matroïde

Un exemple

E : arêtes de l'arbre dont tous les sommets ont degré ω

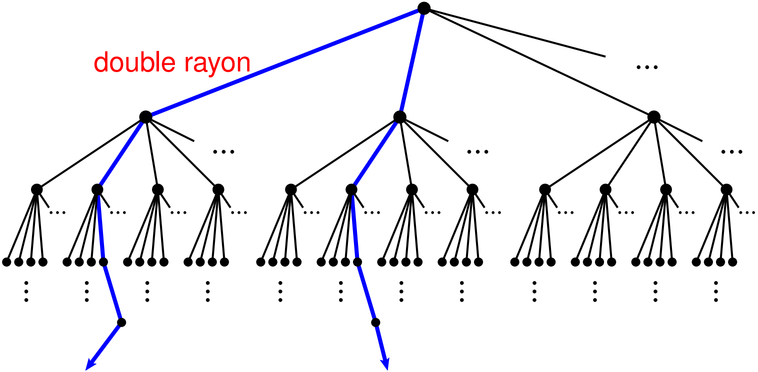
$\mathcal{I}$: tout $I \subseteq E$ ne contenant aucun double rayon



- $(E, \mathcal{I})$ matroïde

Un exemple

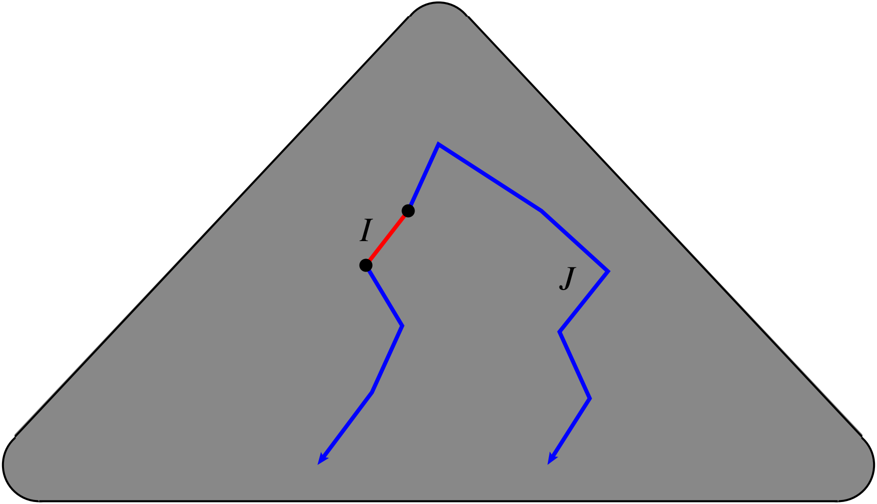
E : arêtes de l'arbre dont tous les sommets ont degré ω
$\mathcal{I}$: tout $I \subseteq E$ ne contenant aucun double rayon



- $(E, \mathcal{I})$ matroïde

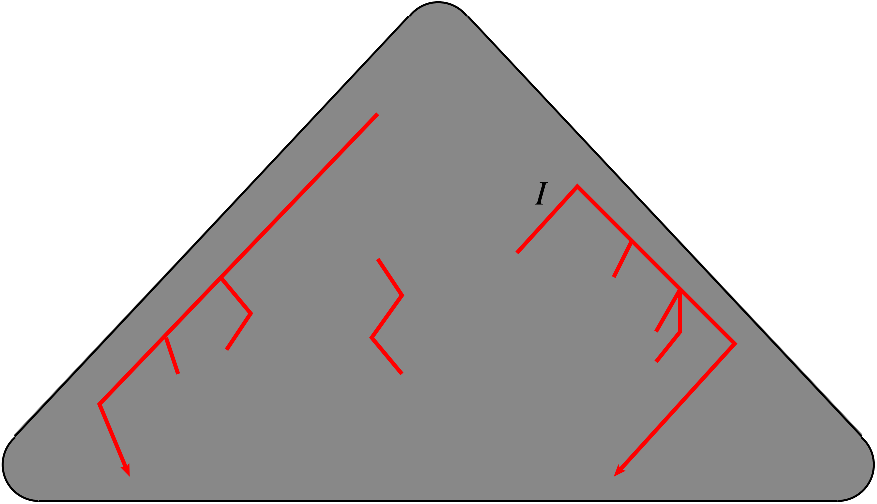
Un exemple II

(I3′) Si $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^{\max}$ et $J \in \mathcal{I}^{\max}$, alors il existe $x \in J \setminus I$ tel que $I + x \in \mathcal{I}$



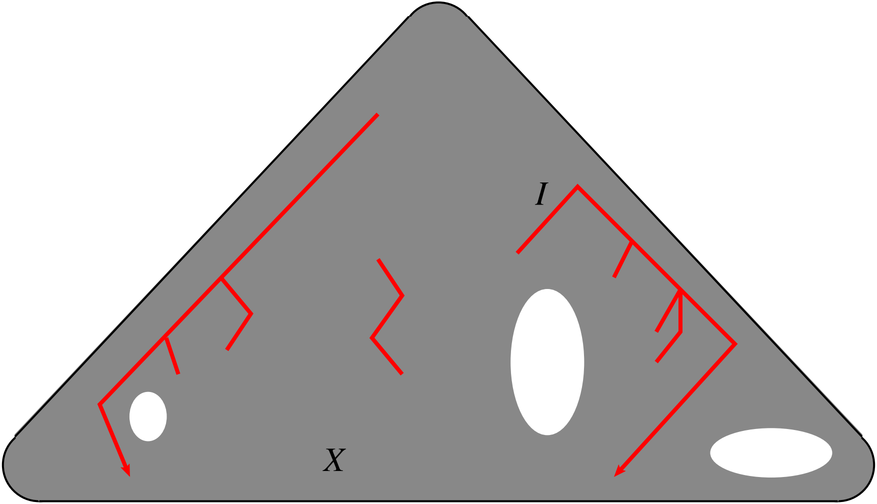
Un exemple II

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max



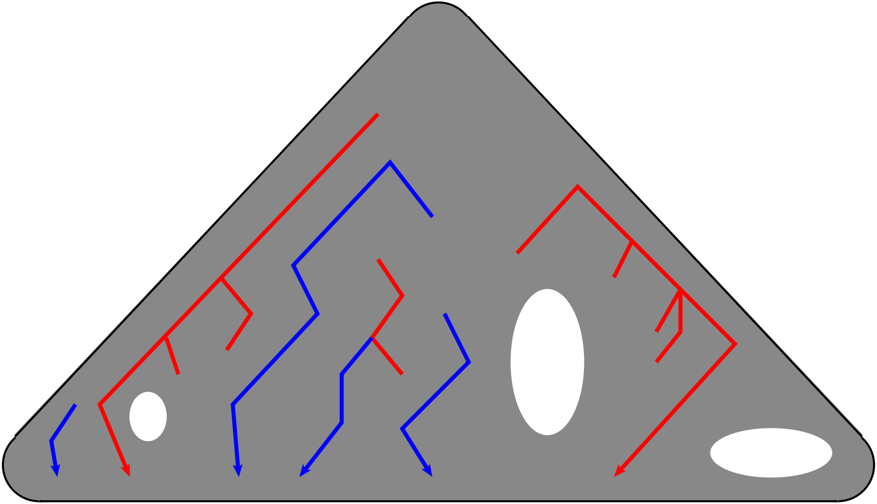
Un exemple II

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max



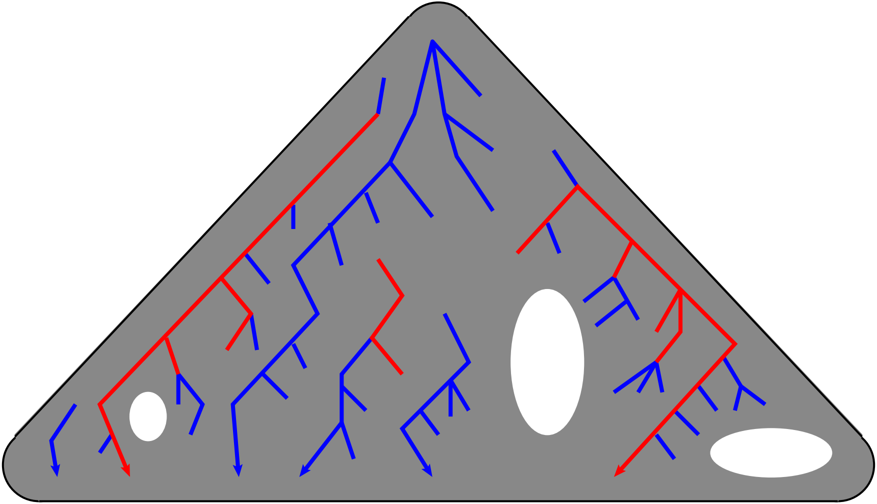
Un exemple II

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max



Un exemple II

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max



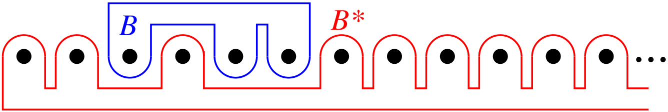
Points clés des matroïdes infinis

- ensembles indépendents
- bases ($\rightarrow$ maximalement indépendent)
- circuits ($\rightarrow$ minimalement dépendent)
- dualité
- cryptomorphisme

$\rightarrow$ comme pour les matroïdes finis

Dualité des matroïdes infinis

(IM) Pour tous $I \in \mathcal{I}$ et $X \subseteq E$ l'ensemble $\{J \in \mathcal{I} : I \subseteq J \subseteq X\}$ a un élément $\subseteq$-max



$E = \mathbb{Z}$

primal $U_{3,\infty}$

$\mathcal{I}$: ensembles de cardinalité ≤ 3

$\mathcal{B}$: ensembles de cardinalité 3

- $(E, \mathcal{I})$ vérifie (I1)–(IM)

dual $U^*_{3,\infty}$

$\mathcal{B}^* = \{X \subseteq \mathbb{Z} : |\mathbb{Z} \setminus X| = 3\}$

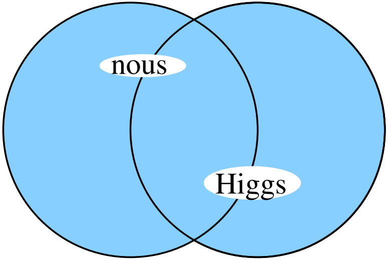
$\mathcal{I}^* = \{X \subseteq \mathbb{Z} : |\mathbb{Z} \setminus X| \leq 3\}$

- $(E, \mathcal{I}^*)$ vérifie (I1)–(IM)

Liens historiques

B-matroïdes de Higgs :

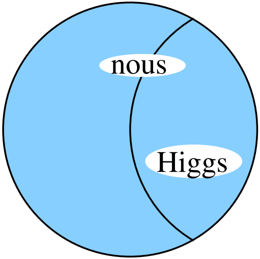
	nous	Higgs (& Oxley !)
bases	✔	✔
circuits	✔	✔
dualité	✔	✔
cryptomorphisme	✔	✖



Liens historiques

B-matroïdes de Higgs :

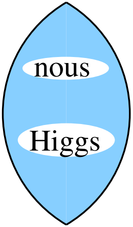
	nous	Higgs (& Oxley !)
bases	✔	✔
circuits	✔	✔
dualité	✔	✔
cryptomorphisme	✔	✖



Liens historiques

B-matroïdes de Higgs :

	nous	Higgs (& Oxley !)
bases	✔	✔
circuits	✔	✔
dualité	✔	✔
cryptomorphisme	✔	✖



Une théorie naissante

Nos systèmes d'axiomes$\longrightarrow$

- concept de connectivité/Tutte's linking theorem (Bruhn & Wollan)
- représentation, duals des espaces vectoriels (Afzali & Bowler)
- intersection des matroïdes (Bowler & Carmesin)
- unions des matroïdes (Aigner-Horev, Carmesin & Fröhlich)
- décomposition en parties 3-connexes (Aigner-Horev, Diestel & Postle)

Perspectives

- Étendre la théorie des matroïdes finis à l'infini
- trouver plus d'exemples
  - graphes : source riche
  - est-ce qu'il y a des matroïdes infinis dans des domaines différents de la combinatoire (analyse, topologie, algebre...) ?

Merci beaucoup !