Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Barthalomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 1

(Abgabe: Dienstag 19. April 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 20. April vor der ersten Übung.)

"If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is. " - *John von Neumann, American mathematician, 1903-1957.*

Aufgabe 1 *(Summen)* (2 Punkte)

Berechnen Sie folgende Summen

- $\sum_{k=1}^{5} k^2$
- $\sum_{i=2}^{6} (i-1)^2$
- $\sum_{\ell=0}^{4} (\ell+1)^2$
- $\sum_{k=1}^{10} 1.$

Aufgabe 2 *(Bernoulli's inequality)* (5 Punkte)

Prove by using mathematical induction the following inequality

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 *(Fibonacci-Zahlen)* (5 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen F_n seien definiert durch

$$F_0 := 0, \qquad F_1 := 1, \qquad F_{n+1} := F_n + F_{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie die Formel von Moivre-Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), n \in \mathbb{N}$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 4 *(Straßen)* (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Zeigen Sie folgende Aussage:

Wenn bei n Städten je zwei unterschiedliche Städte mit einer Straße verbunden werden, dann sind es insgesamt $\frac{(n-1)n}{2}$ Straßen.

Aufgabe 5 *(Vollständige Induktion)* (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion folgende Gleichungen

(i) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}$$ *(ii)* $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2,\ n \in \mathbb{N}$$