Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 7

(Abgabe: Dienstag 31. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 01. Juni vor der ersten Übung.)

"*Obvious* is the most dangerous word in mathematics."
- Eric Tempel Bell, 1883 -1960, Scottish mathematician and science fiction author.

Aufgabe 29 *(Binomialkoeffizient, geometrische Summenformel)* (1+1+2=4 Punkte)

(a) Berechnen Sie folgende Werte

$$7!, \binom{72}{70}, \binom{\frac{1}{3}}{4}, \binom{i}{3}.$$

(b) Wie viele unterschiedliche Skatrunden (siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Skat`) kann man mit 10 Teilnehmern bilden? Begründen Sie ihre Aussage.

(c) Oma Ursula legt für ihren Enkel, Mathe Max, ein Sparbuch an. Dieses Geld wird mit 3% Verzinsung pro Jahr bei der lokalen Bank angelegt. Oma Ursula zahlt am Tag der Geburt von Max und am Anfang jedes neuen Lebensjahr jeweils 1000 € ein. Wie viel Euro kann Mathe Max an seinem 18. Geburtstag abheben, wenn Oma Ursula ihm an diesem Tag ebenfalls 1000 € schenkt? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 30 *(Verallgemeinerte Dreieckungleichung)* (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die verallgemeinerte Dreiecksungleichung, d.h. zeigen Sie für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

Aufgabe 31 *(Bernsteinpolynome)* (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie folgende Identitäten

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n \qquad \text{und} \qquad \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} = \frac{n-1}{n}\binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

(b) Berechnen Sie die Bernsteinpolynome

$$B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

jeweils für $f(x) = 1$, $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$.

Aufgabe 32 *(Summen)* (2+2=4 Punkte)

Leiten Sie Formeln für folgende Summen her

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^3$

(b) $\sum_{k=1}^{n} kz^k$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Aufgabe 33 *(Abschätzungen)* (2+2=4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Abschätzungen

(a) Für $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \;\leq\; \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \;\leq\; \frac{1}{k!}.$$

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{(k-2)!}.$$